Capitolo 2

Misure su segnali modulati

2.1 Introduzione

Le modulazioni sono delle tecniche, che si applicano al segnale da trasmettere a distanza, allo scopo di adattarlo alle caratteristiche del canale di comunicazione, mantenendo invariata la sua informazione.

Si immagini una trasmissione radio, per ipotesi assurda, senza alcuna modulazione, in cui, cioè, la voce umana, trasformata da un microfono in corrente elettrica, venga irradiata via etere da un'antenna e catturata tramite un'altra antenna ricevente, da un secondo utente.

La banda utile della voce umana non supera i 5 kHz, per cui, senza un'opportuna modulazione, anche la frequenza delle onde elettromagnetiche irradiata via etere sarebbe la stessa, con una serie di inaccettabili conseguenze:

- Le dimensioni delle antenne, cioè $\lambda/4$ o $\lambda/2$ sarebbero, non dico proibitive, ma assolutamente impensabili, visto che alla frequenza di 5 kHz, la lunghezza d'onda corrispondente è di 60 Km e quindi le antenne, per avere una buona efficienza, dovrebbero essere lunghe o 15 Km o 30 Km.

- La potenza necessaria ad alimentare un'antenna di queste dimensioni sarebbe enorme.

Da quanto detto se ne deduce l'assoluta necessità della modulazione che, traslando in frequenza il segnale, ed allocando in canali diversi le trasmissioni di utenti diversi, invece, produce esattamente tutti i vantaggi opposti:

- Essendo la frequenza della trasmissione molto elevata, la lunghezza delle antenne diventa umanamente e praticamente possibile, per esempio in FM a 100 MHz, risulta: 75 cm
- Conseguentemente la potenza impiegata diventa molto minore.
- Le dimensioni del trasmettitore diventano minime, basti guardare quelle di un cellulare di oggi.

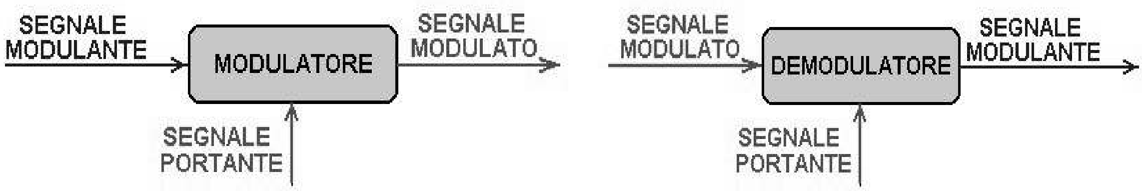
Chiariti i motivi base che convincono a modulare, si vede ora in che cosa consiste la modulazione.

In primo luogo bisogna adattare le caratteristiche dello spettro del segnale da trasmettere in modo che possa transitare bene attraverso il canale.

Dunque deve essere sempre presente il segnale informativo, cioè l'informazione da trasmettere sotto forma di corrente elettrica o di tensione elettrica. Questa prende il nome di *modulante*.

Deve essere però sempre presente anche un altro segnale, detta *portante*, che consentirà la traslazione in frequenza del segnale modulante, per consentirne tutti quei vantaggi della modulazione di cui si è detto.

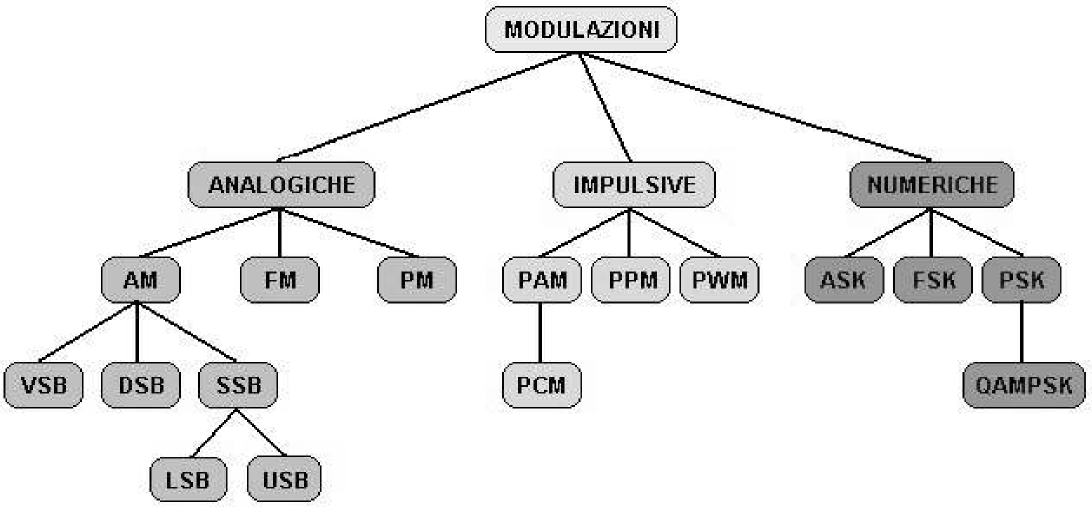
L'operazione di modulazione ha dunque bisogno di un *modulatore*, dispositivo elettronico in grado di traslare in frequenza il segnale mantenendo invariata l'informazione da trasmettere.



In ricezione, naturalmente, avviene il procedimento inverso ed il segnale modulato, che ha attraversato il canale di trasmissione, viene demodulato dal *demodulatore*, rigenerando il segnale modulante originario che contiene l'informazione.

2.2 Classificazioni delle modulazioni

Vista la varietà e la generalità delle operazioni connesse con la modulazione, in quanto l'adattamento, per esempio, del segnale al canale si può intendere e realizzare in modi del tutto diversi a seconda che il segnale sia **analogico o numerico**, e che il canale sia un doppino telefonico, una fibra ottica, o l'etere, che hanno caratteristiche fisiche alquanto differenti, se ne deduce, come conseguenza, che si ha una classificazione delle modulazioni.

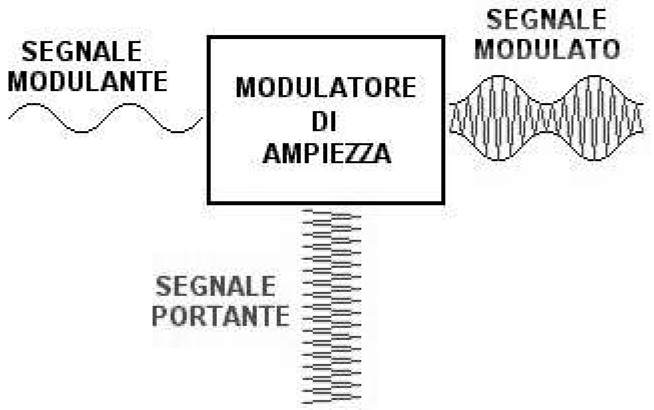


2.3 La modulazione di ampiezza

La modulazione di ampiezza è stata la prima modulazione impiegata nelle trasmissioni via etere da Guglielmo Marconi agli inizi del secolo, in quanto la più facile da concepire e da realizzare, sia nella fase di trasmissione che di ricezione, specialmente in quei tempi, quando l'elettronica ancora non disponeva di apparecchiature specifiche.

	
Guglielmo Marconi, in una foto relativa alla sua giovinezza, quando inventò la radio	La stazione **San Filippo**, la prima stazione radiotelegrafica trasmittente realizzata da Guglielmo Marconi a Roma

Modulare in ampiezza vuol dire far variare l'ampiezza di una portante a radiofrequenza secondo l'ampiezza di una modulante a bassa frequenza.

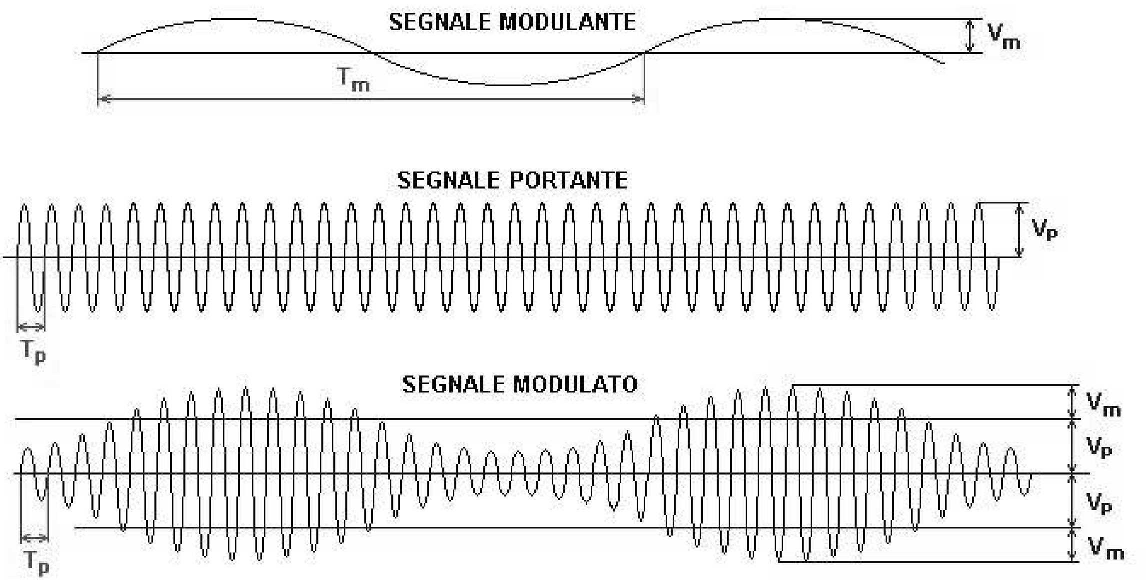
L'operazione di modulazione di ampiezza si effettua partendo da un segnale elettrico prodotto da un oscillatore a radiofrequenza, cioè alle frequenze usualmente usate nelle trasmissioni radio, e che costituisce la portante.	

Di questo ci si serve per portare, appunto, a distanza l'informazione racchiusa nel segnale a bassa frequenza detta modulante.

Il segnale portante è costituito da una sinusoide, mentre la modulante è un segnale analogico, che può essere schematizzato, per semplicità di calcolo, in un'altra sinusoide, per effetto del teorema di Fourier per cui un qualsiasi segnale periodico od aperiodico, può sempre considerarsi come la somma di infinite sinusoidi.

Nello schema seguente sono indicati i tre segnali: *modulante*, a bassa frequenza, *portante*, ad alta frequenza, *modulato*, con la frequenza della portante, ma l'ampiezza che varia secondo la modulante.

Sono indicati anche i periodi e le ampiezze dei tre segnali.



Le funzioni matematiche che esprimono questi segnali possono essere scelte come segue:

$$v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$$

$$v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$$

ricordando che pulsazione, frequenza e periodo sono legate fra loro:

$$f_m = \frac{1}{T_m} \qquad \omega_m = 2 \cdot \pi \cdot f_m = \frac{2 \cdot \pi}{T_m}$$

$$f_p = \frac{1}{T_p} \qquad \omega_p = 2 \cdot \pi \cdot f_p = \frac{2 \cdot \pi}{T_p}$$

e che deve esistere la condizione:

$$f_p >> f_m$$

Per determinare la formula matematica del segnale modulato in ampiezza, ricordiamo che l'ampiezza del segnale modulato deve variare, partendo dal valore della portante a riposo, secondo la funzione modulante.

$$v_{AM}(t) = (V_p + V_m \cos \omega_m t) \cdot \cos \omega_p t$$

Definiamo a questo punto l'indice di modulazione, o profondità di modulazione, come il rapporto fra l'ampiezza del segnale modulante e l'ampiezza del segnale portante:

$$m = \frac{V_m}{V_p}$$

Risulterà di conseguenza:

$$V_m = mV_p$$

e l'espressione del segnale modulato potrà scriversi come segue:

$$v_{AM}(t) = (V_p + mV_p \cos \omega_m t) \cos \omega_p t = V_p \cos \omega_p t + mV_p \cos \omega_m t \cos \omega_p t$$

Questa espressione, ricordando una delle formule di Werner:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

si può esprimere come segue:

$$v_{AM}(t) = V_p\cos\omega_p t + \frac{mV_p}{2}\cos(\omega_p-\omega_m)t + \frac{mV_p}{2}\cos(\omega_p+\omega_m)t$$

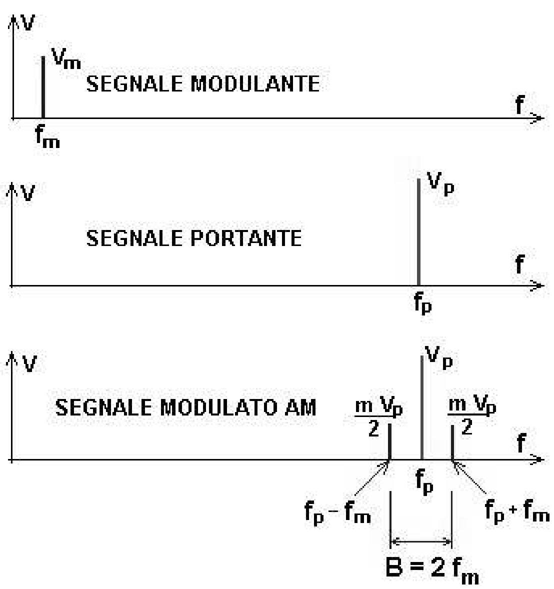
Questa si interpreta come la somma di tre funzioni sinusoidali di cui la prima coincide con la portante a riposo, e le altre due sono due sinusoidi di ampiezza:

$$\frac{mV_p}{2}$$

che come frequenza hanno: una la somma, e una la differenza fra frequenze portante e modulante.

Ne nasce la rappresentazione nel dominio delle frequenze in figura, dove sono rappresentate: il segnale **modulante**, il segnale **portante** e il segnale **modulato** in ampiezza.

Si osservi come l'operazione di modulazione ha dato luogo ad una traslazione in frequenza del segnale modulante $\mathbf{f_m}$ della quantità $\mathbf{f_P}$ **.**



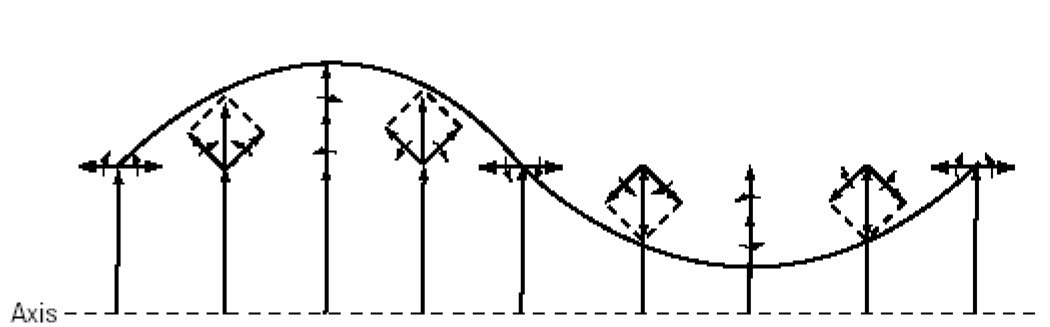
Si osservi la larghezza di banda del segnale modulato che risulta essere il doppio della frequenza $\mathbf{f_m}$ modulante, infatti:

$$B = (f_p + f_m) - (f_p - f_m) = 2f_m$$

Per esempio se una portante a 1 MHz è modulata da un segnale sinusoidale a 4,5 kHz, la larghezza di banda richiesta per ricevere e trasmettere l'intero segnale AM è 2x4,5 kHz=9 kHz, centrata attorno ad 1 MHz.

Quindi il segnale modulato in ampiezza per una modulazione sinusoidale consiste di 3 componenti ad alta frequenza e di nessuna componente a bassa frequenza.

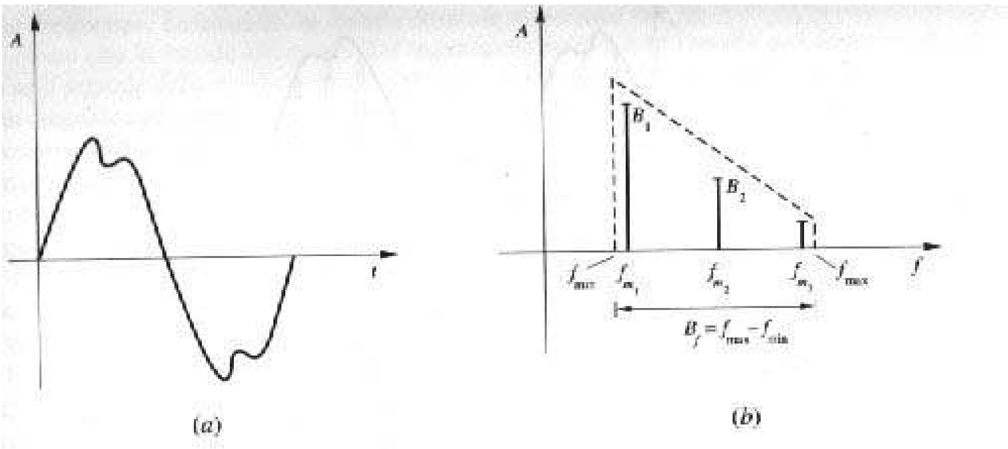
Dalle 3 componenti ad alta frequenza, ***portante***, banda laterale ***superiore (USB),*** banda laterale ***inferiore(LSB)***, del segnale AM si ricavano quindi utili informazioni sullo spettro di frequenza, sulla larghezza di banda e sulle relazioni di potenza tra le diverse componenti.



Nel segnale AM le 3 sinusoidi ad altra frequenza a volte si sommano e a volte si sottraggono per produrre le variazioni di ampiezza sinusoidale della portante.

In generale il segnale della modulante non è sinusoidale ma è costituito da diversi componenti di frequenza aventi ampiezze diverse (teorema di Fourier).

Per semplicità consideriamo un segnale costituito solo da 3 componenti spettrali di ampiezza e frequenza diverse comprese tra f_{min} e f_{max}



$$V_m = B_1 \cos 2\pi f_{m1} t + B_2 \cos 2\pi f_{m2} t + B_3 \cos 2\pi f_{m3} t$$

Il segnale modulato avrà una ampiezza variabile data dalla somma dell'ampiezza A della portante e quella relativa alla ampiezza delle righe:

$$A + B_1 \cos 2\pi f_{m1} t + B_2 \cos 2\pi f_{m2} t + B_3 \cos 2\pi f_{m3} t$$

La frequenza dello stesso segnale coincide con quello della portante f_p

In definitiva l'espressione del segnale modulato è:

$$V_{AM} = [\, A + B_1 \cos 2\pi f_{m1} t + B_2 \cos 2\pi f_{m2} t + B_3 \cos 2\pi f_{m3} t \,] \cos 2\pi f_p t$$

Da tale espressione si può ricavare l'indice di modulazione per singola componente:

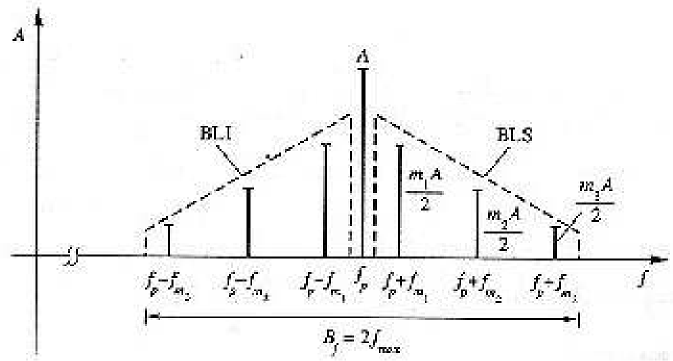
$$m_1 = \frac{B_1}{A}; m_2 = \frac{B_2}{A}; m_3 = \frac{B_3}{A}$$

e quindi si può ricavare l'indice di modulazione totale:

$$M_{TOT} = \sqrt{\sum m_i^{\,2}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

In tale caso il metodo pratico di misura dell'indice di modulazione indicato per le modulanti sinusoidali non è più valido, poiché i valori risultano molto approssimati.

Lo spettro sarà costituito da sei righe disposte simmetricamente rispetto alla riga relativa alla portante.



L'insieme delle componenti a sinistra della portante, caratterizzate dalla differenza di due frequenze, costituisce la banda laterale inferiore del segnale AM, mentre quello delle componenti disposte a destra della portante, caratterizzate dalla somma di due frequenza, costituisce la banda superiore.

E' ovvio che la banda occupata dal segnale AM risulta più larga se il segnale della modulante presenta uno spettro più ampio.

Se si considera un segnale ad onda quadra esso si può sviluppare in serie di Fourier e lo approssima fino alla settima armonica. Lo spettro di questo segnale, considerando solo le armoniche dispari, sarà costituito da quattro righe e pertanto il segnale modulato sarà costituito da nove righe.

2.3.1 Indice di modulazione ed ampiezza di banda laterale

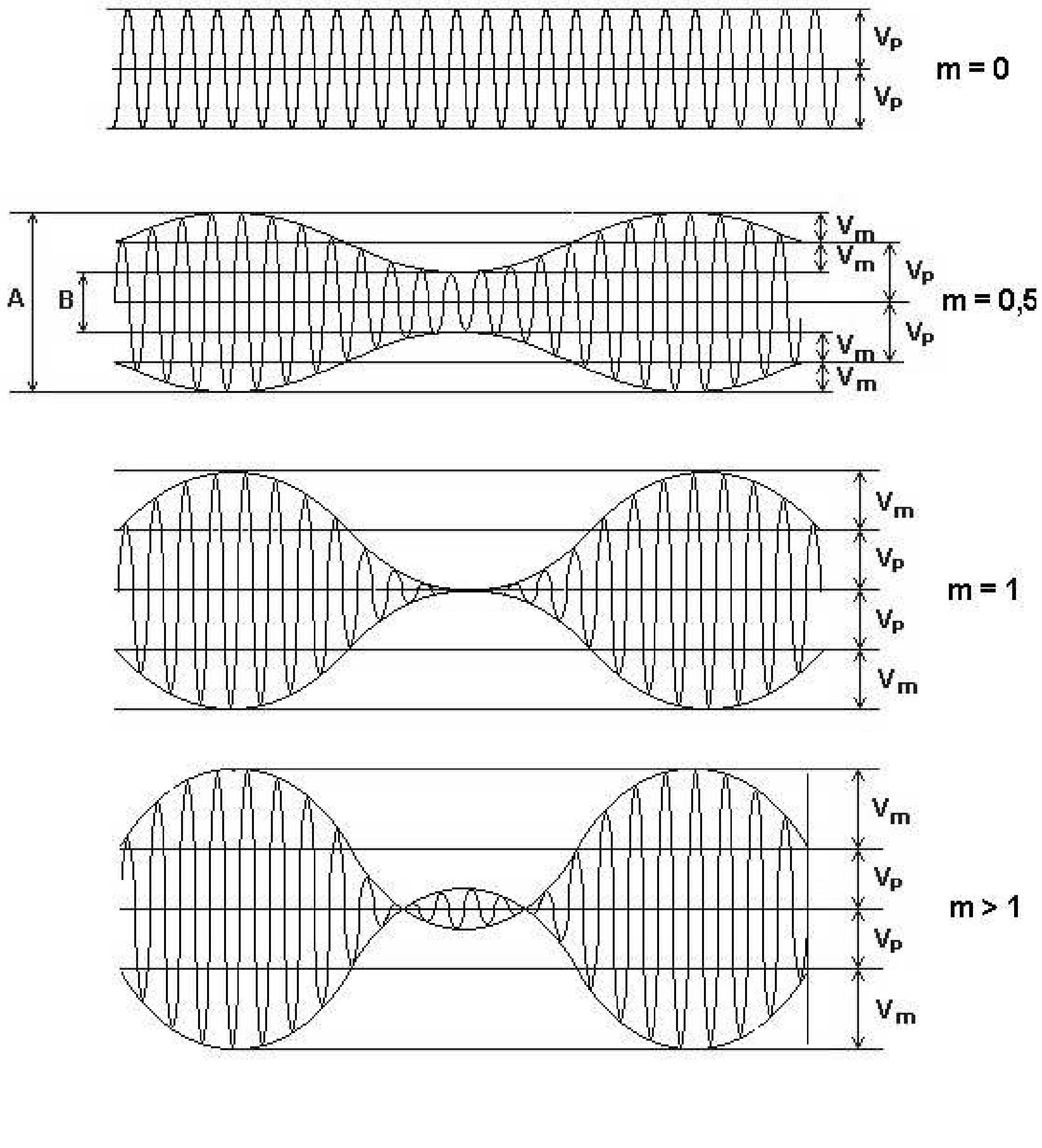
L'indice di modulazione **m** può variare fra **0** e **1** :

$$0 < m < 1$$

Ricordando la formula di **m**:

$$m = \frac{V_m}{V_p}$$

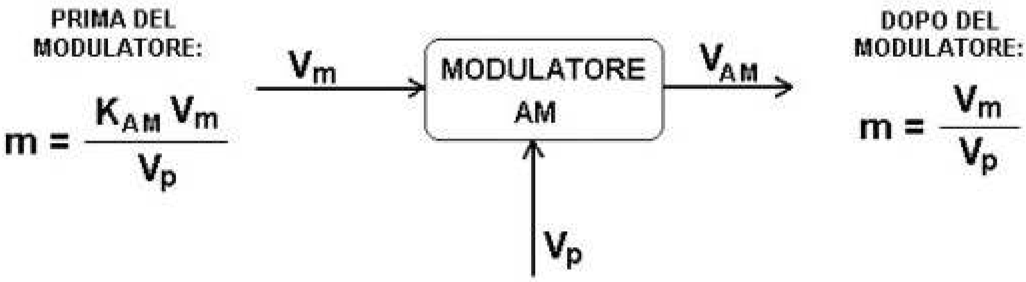
si osserva infatti che se è **m = 0** vuol dire che non c'è **modulante**, quindi non si trasmette alcuna informazione, pur impegnando il canale con la portante. Se è **m = 0,5** si è nelle condizioni ottimali. Se è **m = 1** si è di fronte al massimo della modulazione. Se è **m > 1** allora si è in forte distorsione da **crossover** come rappresentato nella figura successiva:



L'indice di modulazione **m** si può rilevare dall'immagine di sopra con la formula:

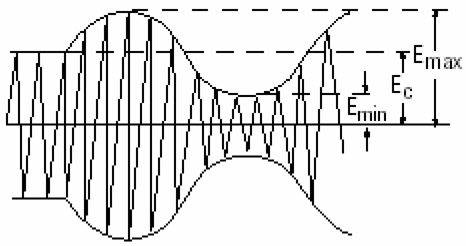
$$\boldsymbol{m} = \frac{A-B}{A+B} = \frac{(2V_P + 2V_m) - (2V_P - 2V_m)}{(2V_P + 2V_m) + (2V_P - 2V_m)} = \frac{4V_m}{4V_P} = \frac{V_m}{V_p}$$

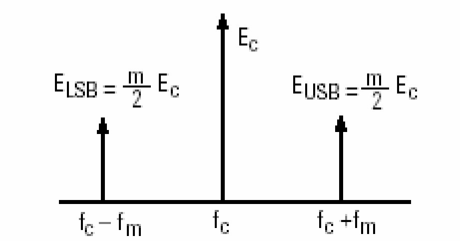
L'indice di modulazione fin qui descritto è rilevato all'uscita del modulatore, ma talora si dispone del segnale all'ingresso del modulatore, in tal caso si deve tenere conto della costante del modulatore K_{AM} e la formula diventa:



Di solito si preferisce misurare l'indice di modulazione *m* in percentuale. Nel dominio del tempo il grado di modulazione per una modulazione sinusoidale è calcolata come segue:

$$m = \frac{E_{max} - E_c}{E_c}$$





Siccome la modulazione è simmetrica,

$$E_{max} - E_c = E_c - E_{min}$$

$$\frac{E_{max} + E_{min}}{2} = E_c$$

è facile dimostrare che $m = \dfrac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}$ per una modulazione sinusoidale.

Quindi si distinguono i 3 casi :

- m=0
- m=1
- m>1

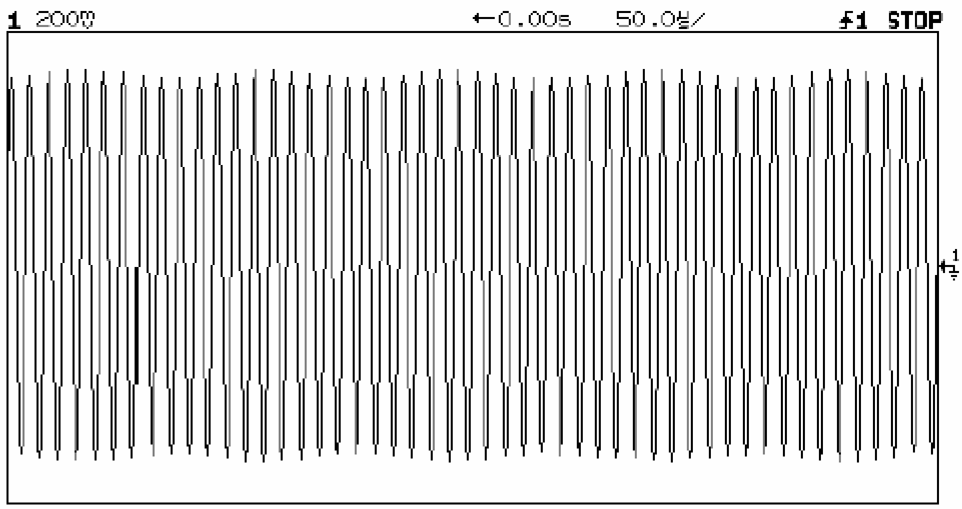
Nel primo caso si trasmette soltanto la portante non modulata in quanto è assente il segnale modulante.

Nel secondo caso si dice che la portante è stata modulata al 100% in quanto l'ampiezza della portante risulta uguale a quella della modulante (V_m=V_p). In questo caso gli inviluppi della parte positiva e di quella negativa del segnale si toccano in un punto e si è al limite della distorsione.

E' una situazione da evitare in quanto una piccola variazione dell'ampiezza della modulante causerebbe una distorsione armonica.

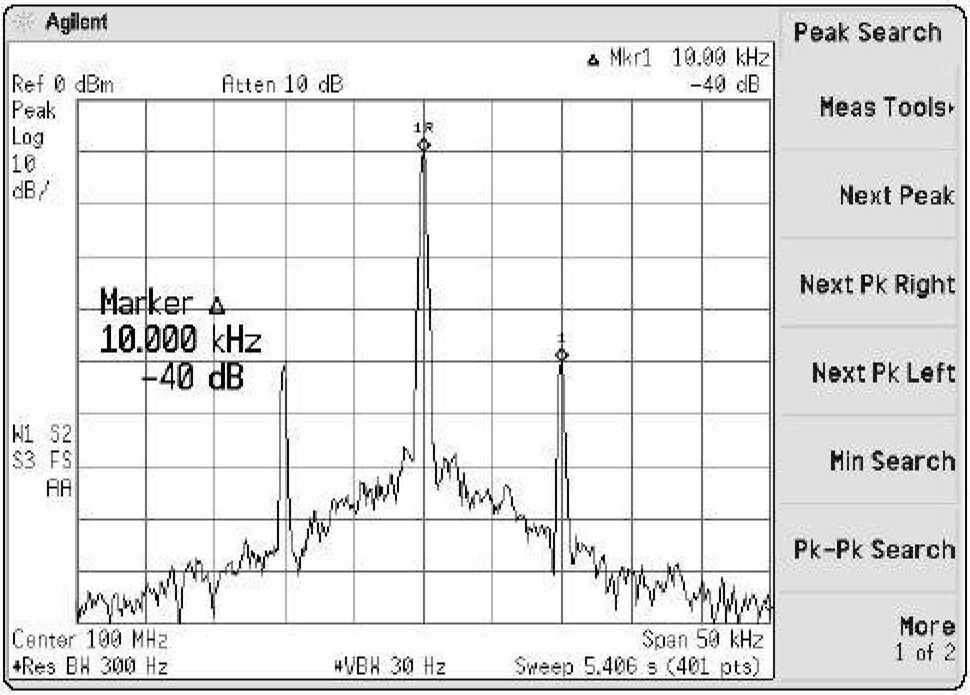
Nel terzo caso invece l'inviluppo del segnale AM non risulta più sinusoidale in quanto l'ampiezza della modulante è maggiore dell'ampiezza della portante. (condizione di sovramodulazione).

Anche se sia facile calcolare la percentuale di modulazione **M** (M = m * 100%) la visualizzazione in scala logaritmica sul display di un analizzatore di spettro offre dei vantaggi specialmente per le basse modulazioni.
Il range dinamico di un analizzatore di spettro (sopra i 70 dB) consente le misurazioni di modulazione in percentuale meno dello 0,06%. Questo effetto può essere visto nelle due seguenti figure dove si ha un indice di modulazione M=2% e quindi un ampiezza della banda laterale (*sideband*) uguale all'1% rispetto alla portante.



(a)

Nel dominio del tempo difficilmente si vede questa differenza, mentre è facile vederlo nel dominio della frequenza in scala logaritmica.



La scala verticale è 10 dB per divisione.

L'ampiezza della modulante può essere misurata facilmente in dB e poi convertita in M.

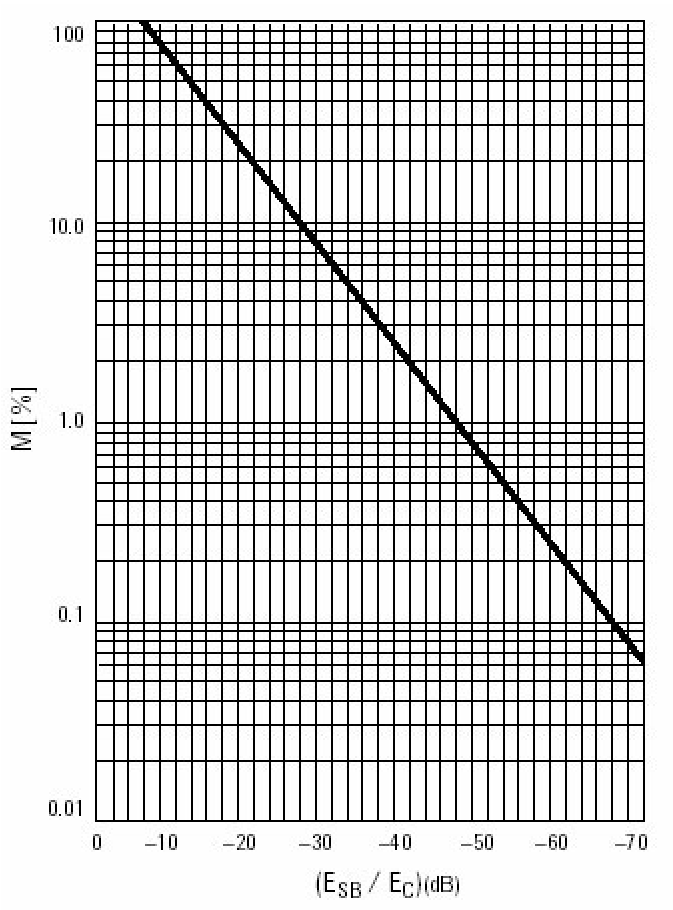
La relazione tra M ed la scala logaritmica vista sul display è la seguente:

$$(E_{SB} / E_C)_{(dB)} = 20 \log \left(\frac{m}{2}\right)$$

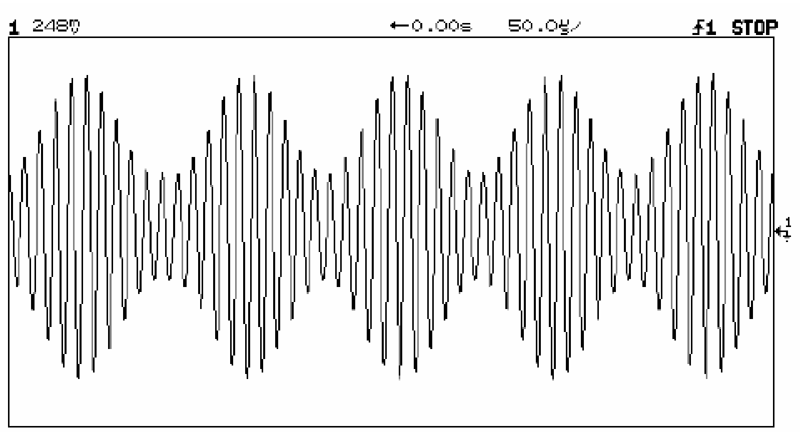
oppure

$$(E_{SB} / E_C)_{(dB)} + 6 \text{ dB} = 20 \log m.$$

La figura seguente mostra graficamente questa relazione.



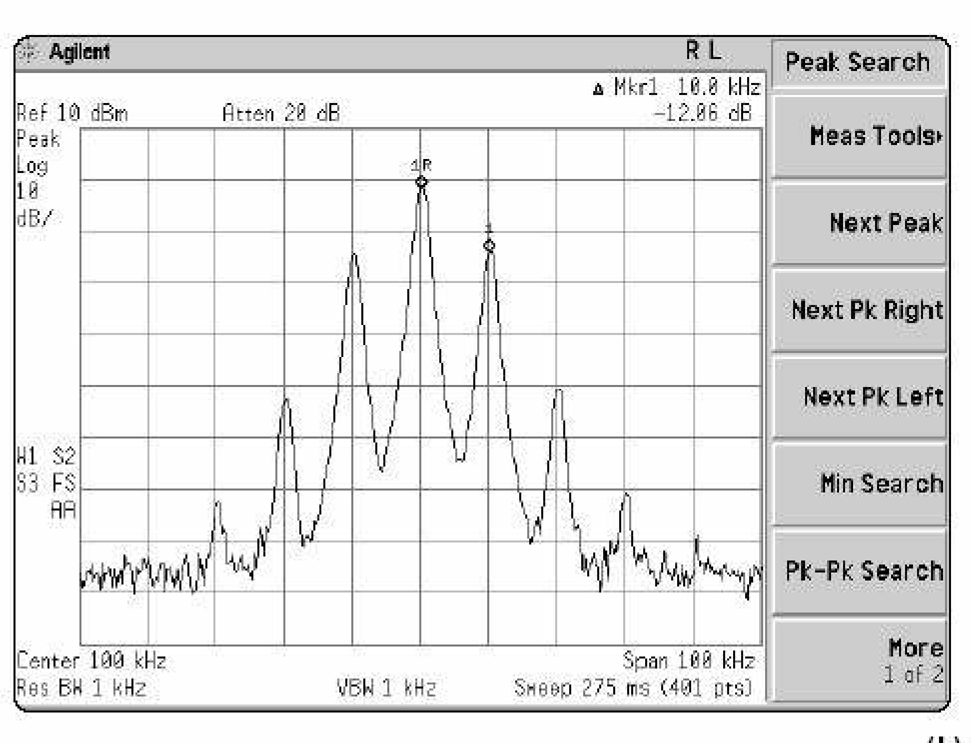
Un altro esempio di misurazione è dato dalle seguenti figure:



(a)

La Figura a) mostra una portante modulata in ampiezza da un onda sinusoidale nel dominio del tempo. Il minimo valore picco-picco è 1/3 del massimo valore picco-picco da cui m=0,5 ed M=50%.

La stessa forma d'onda misurata nel dominio della frequenza la si vede nella figura seguente:



(b)

La Figura b) mostra che la portante e le bande laterali differiscono di 12 dB, quindi M=50%

Si noti che si può misurare anche la distorsione della 2° e della 3° armonica di questa forma d'onda.

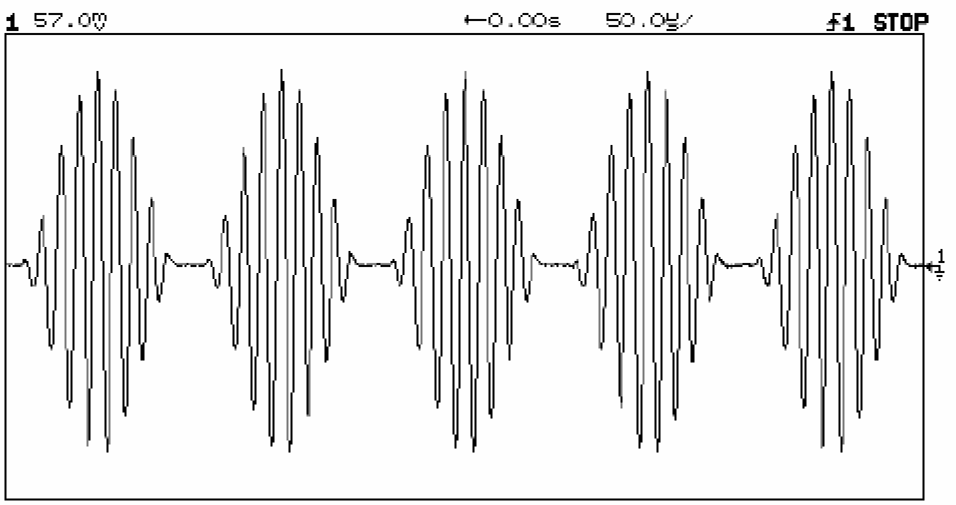
Un indice di modulazione eccessivo produce non solo un taglio dei picchi ed una distorsione armonica ma anche un aumento delle bande laterali.

Tale aumento delle bande laterali fa superare la larghezza di banda concessa per una trasmissione radio.

Infatti per la radio diffusione di segnali AM le norme europee impongono una larghezza di banda pari a 9 kHz e pertanto la massima frequenza di modulazione deve essere pari alla metà della larghezza di banda senza distorsioni (cioè 4,5 kHz), altrimenti lo spettro trasmesso si sovrapporrebbe a quello prodotto da un canale (stazione) adiacente, causando un disturbo di interferenza chiamato diafonia (crosstalk).

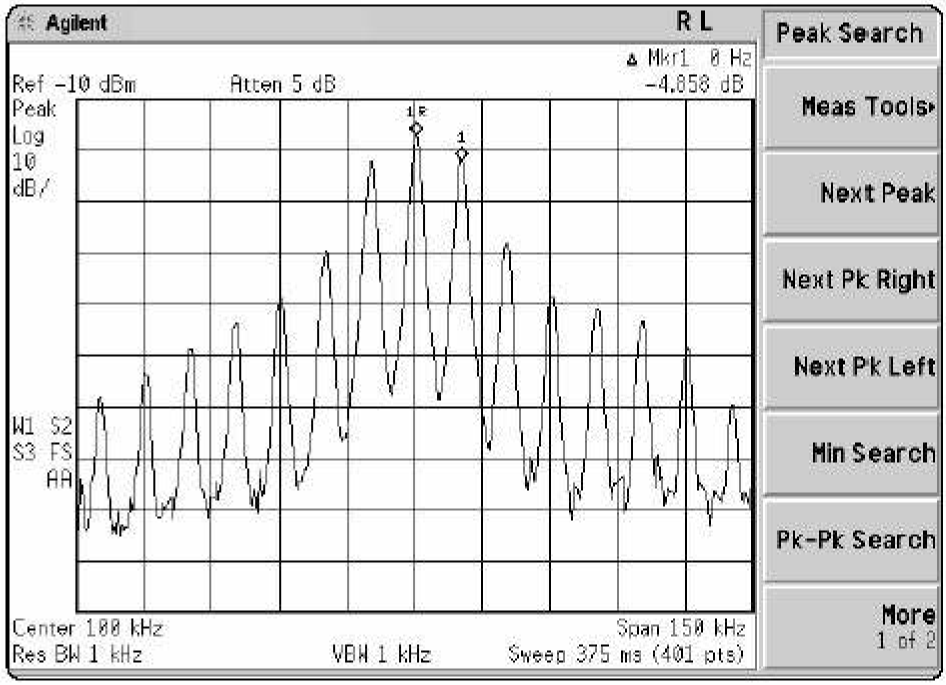
Le trasmissioni commerciali radiofoniche in AM hanno luogo nell'intervallo di frequenza da 525 kHz a 1605 kHz (onde medie).

La figura a) seguente mostra una sovramodulazione (M>100%) nel dominio del tempo.



(a)

La figura b) seguente mostra lo stesso segnale nel dominio della frequenza:



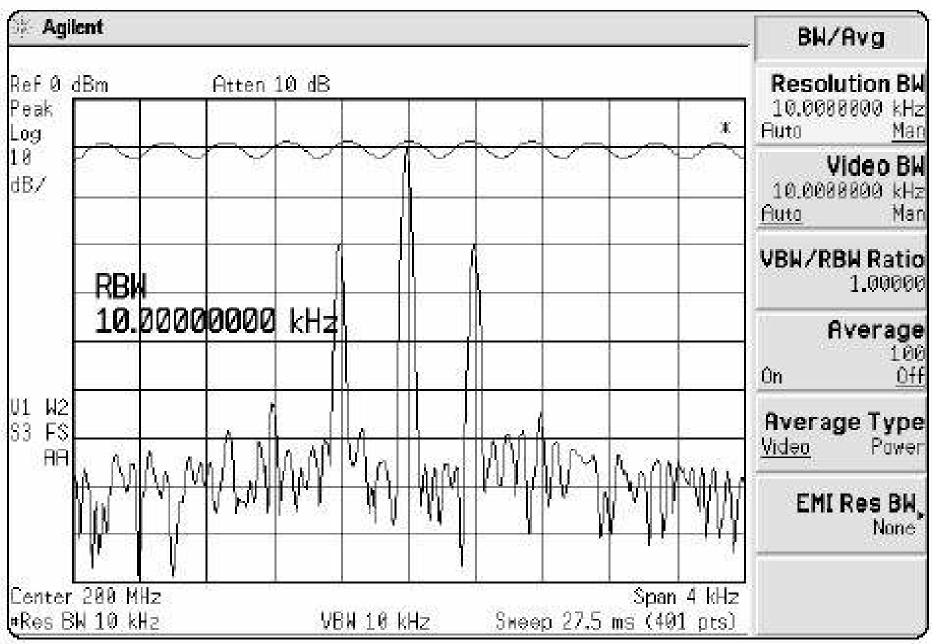
(b)

Si noti che la prima banda laterale è solo 6 dB al di sotto della portante.

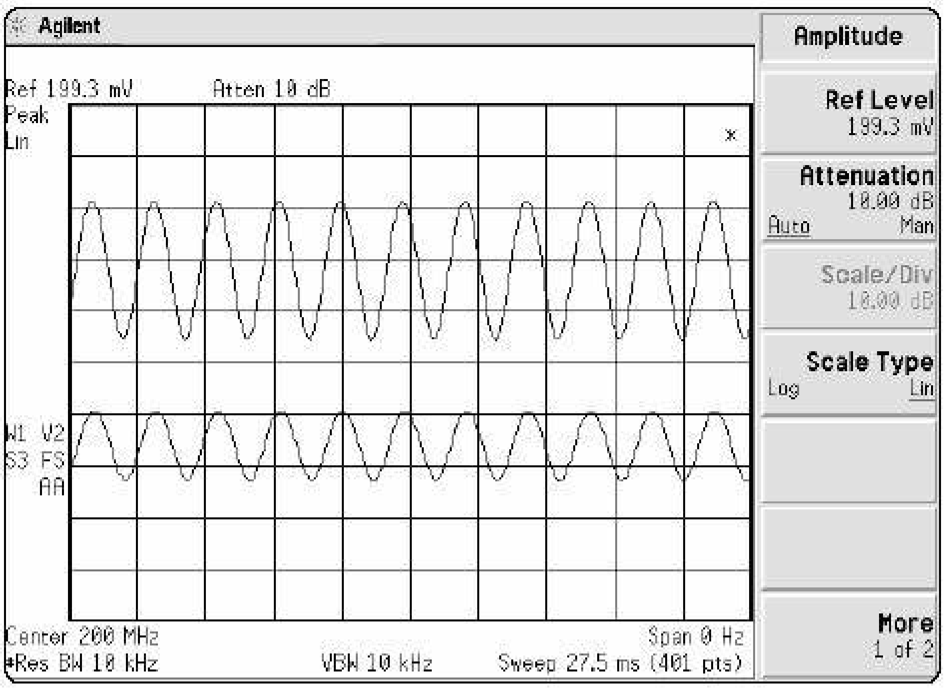
Come si è detto, anche la larghezza di banda occupata è maggiore perché il segnale modulato è fortemente distorto. In questo caso, l'inviluppo del segnale modulato non rappresenta più il segnale modulante.

2.3.2 Zero span e marcatori (markers)

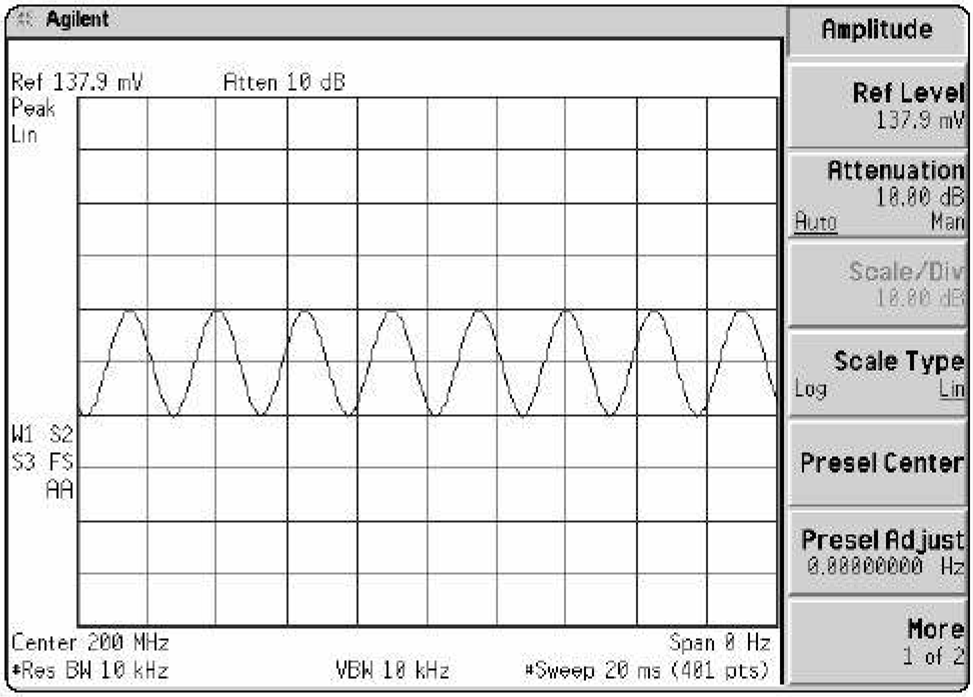
Nel caso si voglia vedere una modulazione in bassa frequenza, l'analizzatore di spettro non ha una risoluzione in larghezza di banda sufficiente per visualizzarla. Ad esempio, una comune modulazione di test è a 400 Hz. Come si risolve il problema se un analizzatore di spettro ha una risoluzione minima di 1 kHz.? Se l'indice in percentuale di modulazione è sufficientemente alto, una soluzione è utilizzare l'analizzatore come un ricevitore fisso *fixed-tuned*, si demodula il segnale usando l'inviluppo dell'analizzatore, si vede il segnale modulato nel dominio del tempo, dopo di che si fanno le misurazioni come su di un oscilloscopio. Per ottenere questo, si deve prima fissare il centro del display dell'analizzatore di spettro, poi settare la risoluzione della larghezza di banda sufficiente per includere la modulazione della banda laterale senza attenuazione, così come è mostrato in figura:



Il passo seguente è selezionare lo *zero span* per sintonizzare l'analizzatore, si regola il livello riferimento trasportando il picco del segnale vicino al top dello schermo, si seleziona in modo lineare il display, e si regola lo sweep time per visualizzare la forma d'onda del segnale modulato. Il tutto è mostrato nella figura seguente:



Muovendo su e giù il livello di riferimento del segnale la differenza di picco-picco tra E_{max} ed E_{min} rimane costante:



Si passa ora a determinare l'indice di modulazione usando la seguente espressione:

$$m = (E_{max} - E_{min}) / (E_{max} + E_{min}).$$

Nel caso in figura si ha E_{max} di 6 divisioni ed E_{min} di 4 divisioni:

$$m = (6 - 4) / (6 + 4) = 0.2, \text{ or } 20\% \text{ AM}.$$

La frequenza del segnale modulante può essere determinato dallo sweep time calibrato dell'analizzatore.

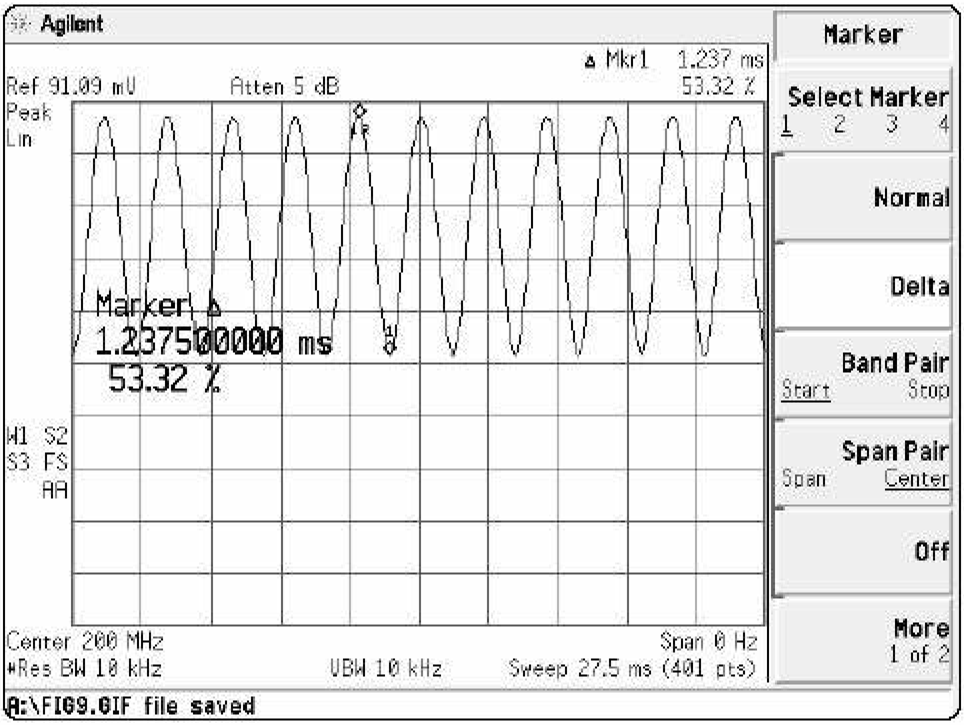
In figura si vede che 4 cicli coprono precisamente 5 divisioni sul diplay. Con un totale di sweep time di 20 millisecondi, i 4 cicli cadono su un intervallo di 10 millisecondi. Il periodo del segnale è quindi di 2,5 millisecondi, e la frequenza è di 400 Hz.

Molti analizzatori di spettro con display digitale hanno sia i marcatori (*markers*) e sia i *delta markers*. Con essi si possono fare misurazioni molto semplicemente.

Per esempio nella figura seguente si è usato un delta markers per trovare il rapporto **Emin/Emax**.

Modificando l'espressione di *m* si può usare direttamente questo rapporto:

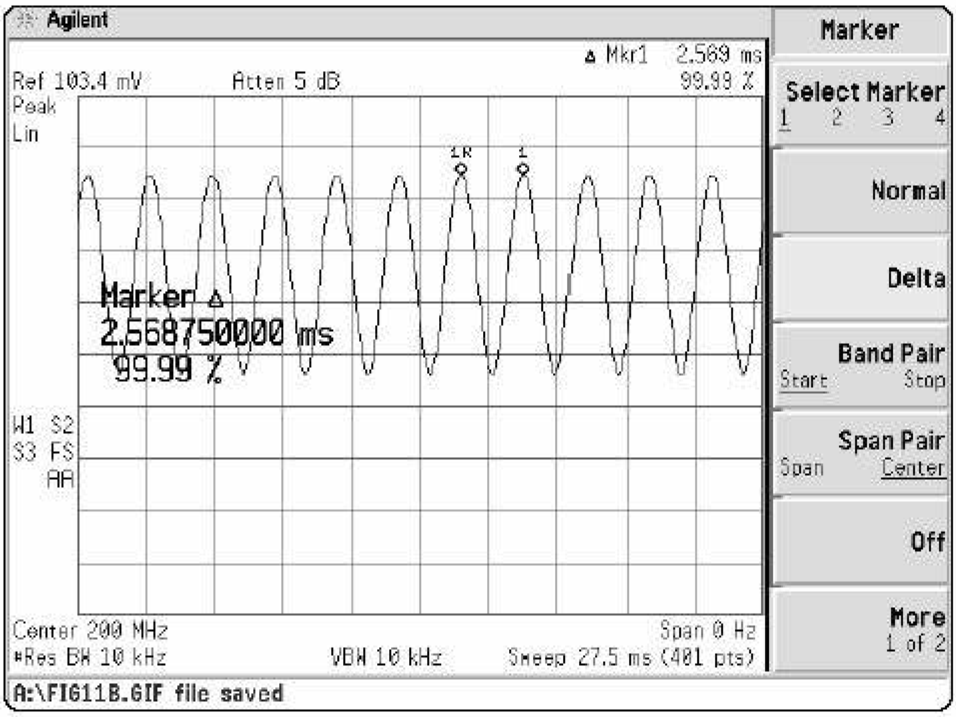
$$m = (1 - E_{min}/E_{max})/(1 + E_{min}/E_{max}).$$



Siccome si sta usando unità lineari, il display dell'analizzatore valuta la delta in frazione decimale (o come in questo caso, in percentuale). Nella figura si mostra il rapporto come 53,32% dando:

$$m = (1 - 0.5332)/(1 + 0.5332) = 0.304, \text{ or } 30.4\% \text{ AM}.$$

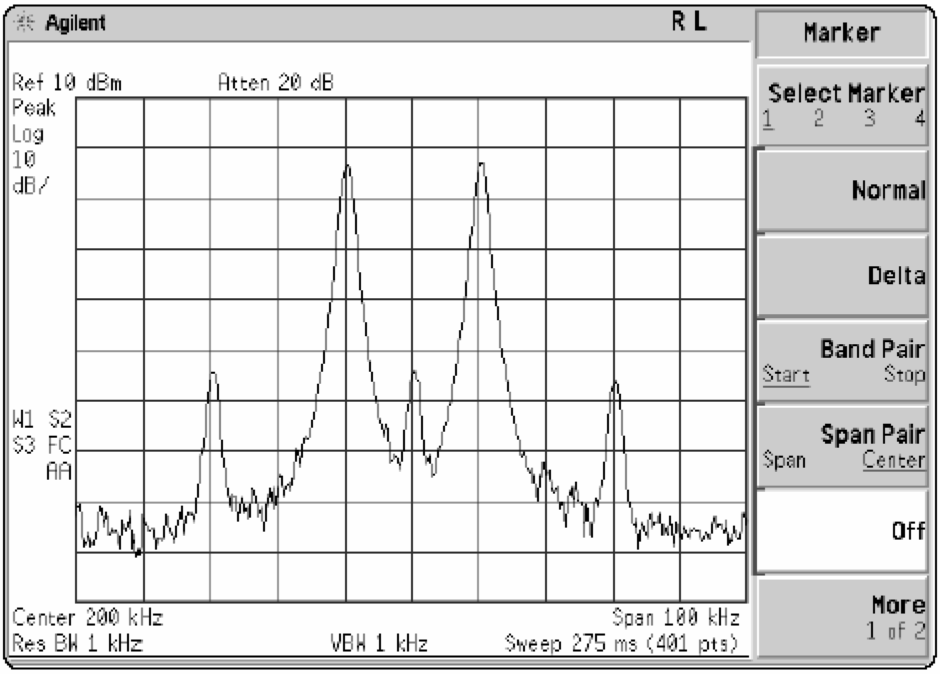
Si nota che la lettura di un delta marker mostra anche la differenza di tempo tra i markers. Questo è vero per la maggior parte degli analizzatori a zero span. Settando i marcatori per uno o più periodi si può prendere il reciproco ed ottenere la frequenza. Nella figura successiva, in questo caso si ottiene 1/2,57 ms o 389 Hz.



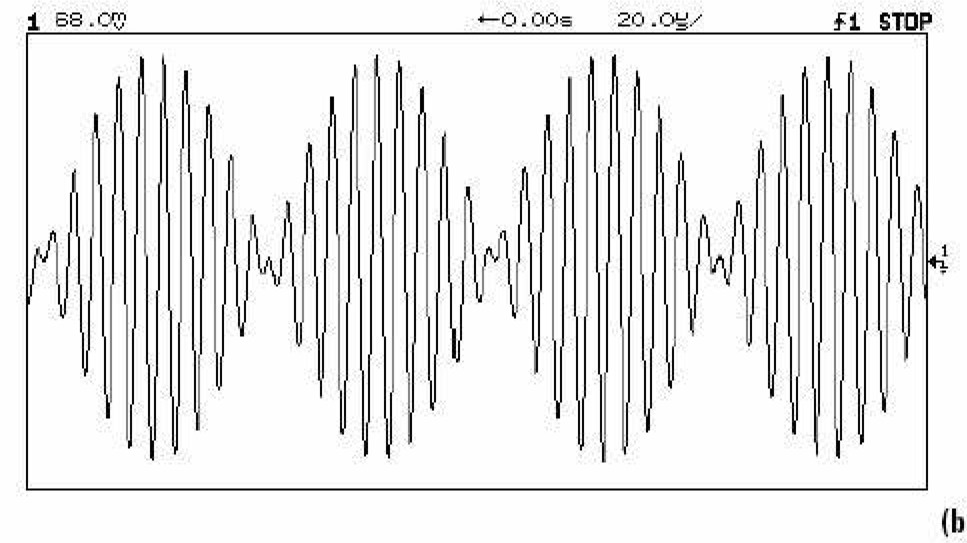
2.3.3 Forme speciali di modulazione di ampiezza

Si sa che cambiando l'indice di modulazione di una particolare portante non cambia l'ampiezza della portante stessa. E' l'ampiezza della banda laterale che cambia, alterando così l'ampiezza dell'onda composita. Fin quando l'ampiezza della portante rimane costante, tutta l'informazione trasmessa è contenuta nelle bande laterali. Questo significa che tutta la potenza trasmessa nella portante è essenzialmente sprecato, anche se la demodulazione si fa molto più semplicemente. Per una migliore efficienza in potenza, la componente della portante può essere soppressa, così che l'onda trasmessa abbia contributo solamente nelle bande laterali. Questo tipo di modulazione è detto doppia banda laterale con portante soppressa DSB-SC (Double SideBand - Suppressed Carrier). La portante comunque deve essere ricevuta affinché si recuperi questa modulazione.

Nelle figure seguenti si mostrano la DSB-SC sia nel dominio della frequenza che nel dominio del tempo:



(a)



(b)

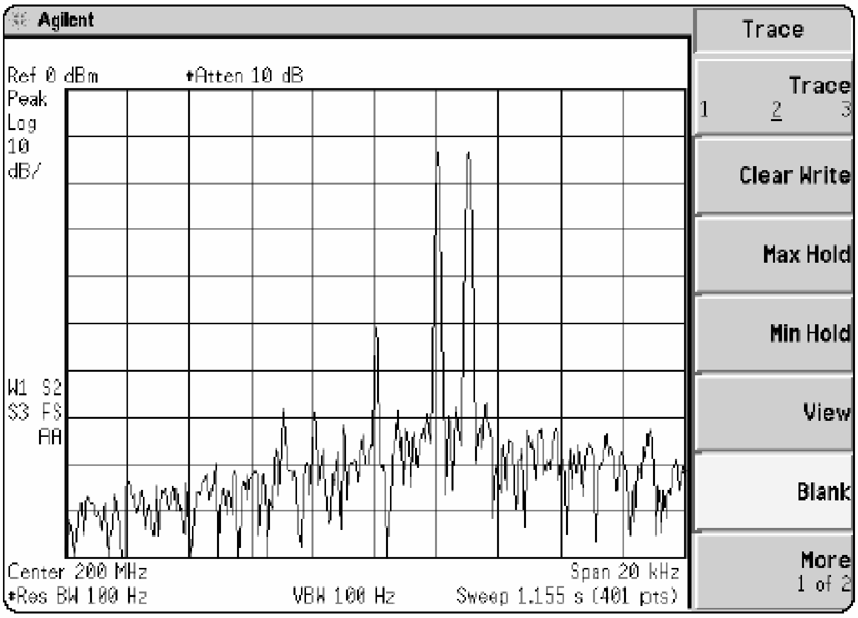
2.3.4 Singola banda laterale

Nelle comunicazioni un importante tipo di modulazione d'ampiezza è la singola banda laterale con portante soppressa SSB (Single Side Band). Sia la banda laterale superiore che la banda laterale inferiore possono essere trasmesse, scritte come SSB-USB o SSB-LSB. Siccome le sue bande laterali hanno uguale ampiezza segue che l'informazione è contenuta uguale sia nell'una che nell'altra banda laterale. Di conseguenza eliminando uno delle due bande laterali dimezziamo la potenza, ma cosa più importante si dimezza la larghezza di banda del segnale.

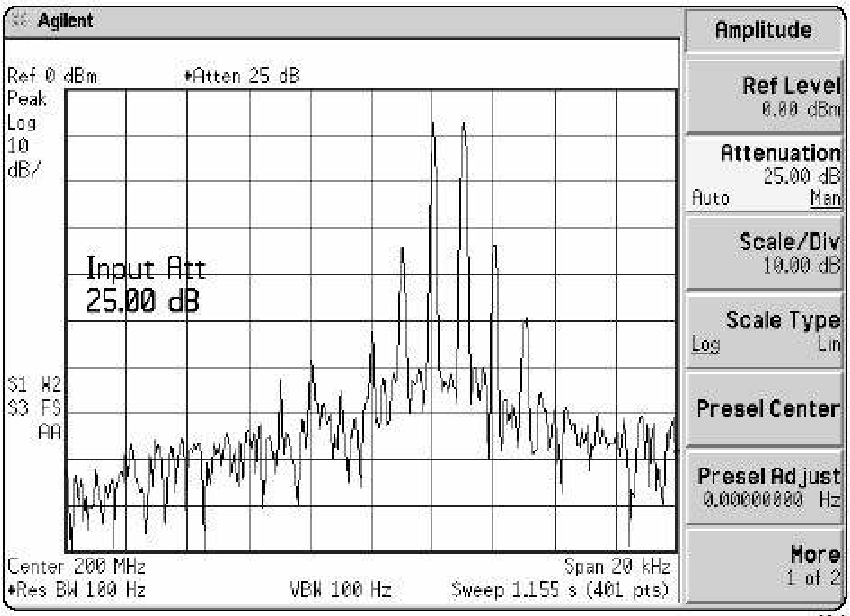
Il segnale SSB è ancora oggi comunemente utilizzato nei sistemi di telefonia analogica utilizzando il multiplex per la creazione del segnale composito.

Per evitare fenomeni di intermodulazione di solito si usano due toni, ognuno con basso contenuto armonico.

La figura seguente mostra un test d'intermodulazione di un trasmettitore SSB.



(a)



(b)

2.4 La modulazione angolare

Dato il segnale modulante *m(t)*, limitato nella banda B e con ampiezza normalizzata $|m(t)|<1$, la forma generale di un segnale modulato in angolo è la seguente:

$$x(t) = \cos\Big(2\pi f_0 t + \varphi\left[m(t)\right]\Big)$$

dove $\varphi[m(t)]$ è la legge di modulazione; essa determina il valore della *fase istantanea* $(2\pi f_0 t+\varphi)$ della portante sinusoidale in corrispondenza al valore m(t) assunto dal messaggio al tempo t.

Specificatamente abbiamo:

$$\varphi\left[m(t)\right] = \begin{cases} K_P \cdot m(t) & \text{modulazione di fase (PM)} \\ 2\pi K_F \int_{-\infty}^{t} m(\vartheta)\, d\vartheta & \text{modulazione di frequenza (FM)} \end{cases}$$

Si definisce *fase istantanea* l'argomento della portante. Nel caso di modulazione di fase abbiamo:

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi f_0 t + K_p \cdot m(t)$$

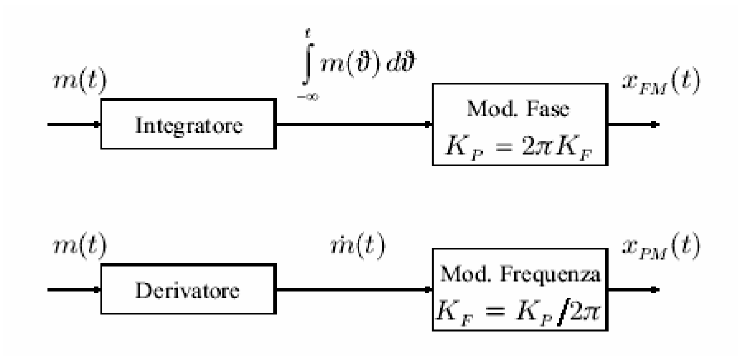
e quindi il parametro *Kp* misura la massima *deviazione* (rispetto al contributo nominale della sola portante $2\pi f_0 t+\varphi$) di fase del segnale modulato.

Definendo la frequenza istantanea come la derivata della fase istantanea, nel caso di modulazione di frequenza abbiamo:

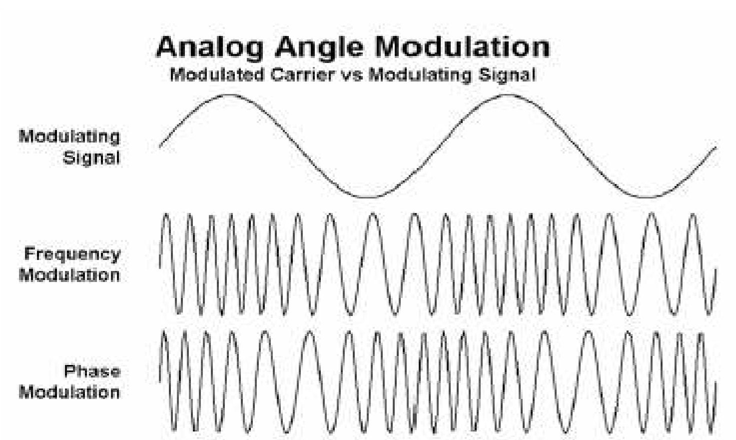
$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(2\pi f_0 t + 2\pi K_F \int_{-\infty}^{t} m(\vartheta)\, d\vartheta\right) = f_0 + K_F \cdot m(t)$$

e il parametro *KF* misura la massima deviazione di frequenza.

Si noti l'equivalenza esistente tra la modulazione di fase e la modulazione di frequenza, illustrata nella seguente figura:



Nel seguito ci soffermeremo sulle misure tramite analizzatore di spettro della modulazione di frequenza, più diffusamente impiegata in trasmissioni di tipo analogico (radio-diffusione di segnale audio), mentre la modulazione di fase trova applicazione nelle trasmissioni numeriche.



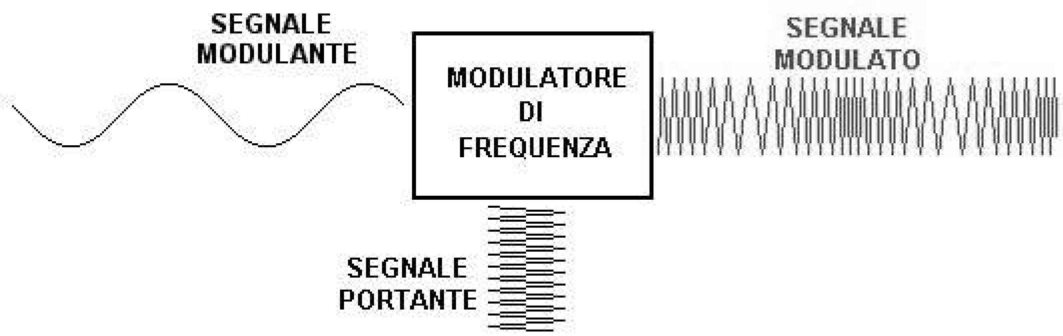
2.4.1 Modulazione di frequenza

Inventata da **Armstrong** nel 1935, ma regolamentata solo nel 1961 in Europa all'interno delle radiodiffusioni stereofoniche, costituisce un considerevole miglioramento rispetto alla AM sia per immunità ai disturbi cui è invece molto soggetta la AM, che per numero di canali effettivamente disponibili, che per l'alta fedeltà delle trasmissioni.

È usata anche per la parte audio del segnale televisivo, trasmesso via etere per la televisione analogica, per i cellulari di tipo ETACS, oltre che per alcune trasmissioni dei radioamatori.

Ha lo svantaggio di avere una banda molto maggiore della AM, per cui è stato necessario attribuirle una gamma di frequenze di cento volte più alta per consentire di usare larghezze di banda molto maggiori.

Nella modulazione di frequenza, la frequenza della portante viene fatta variare secondo l'ampiezza della modulante, mentre l'ampiezza della portante rimane invariata, come schematicamente è rappresentato nella figura seguente:



Le radiodiffusioni in stereofonia attualmente usano la FM (Frequency Modulation).

L'insieme delle frequenze, costituito dalla banda stereofonica, è stata normalizzata già nel 1961 dalla F.C.C. (Federal Communications Commission) dai 30 Hz a 15 kHz

Questa banda coincide quasi con la banda di sensibilità dell'orecchio umano che è, mediamente dai 20 Hz a 20 kHz in modo che questo sistema stereofonico consente praticamente di trasmettere tutto quello che l'orecchio umano può sentire.

Diversamente avveniva per le trasmissioni in AM**,** attualmente attive ma in disuso, che avendo una banda di 5 kHz sono molto più simili alla banda telefonica 300 Hz a 3,4 kHz.

Nella AM, infatti, si trasmette la voce umana, ma non la musica, o meglio, non fedelmente, visto che i violini, ad esempio, hanno uno spettro che supera i 9.000 Hz e che quindi è ben trasmesso dalla FM che arriva a 15.000 Hz ma mal trasmesso dalla AM che arriva appena a 5.000 Hz

Nella FM sono presenti: una *modulante* di tipo analogico, ed una *portante* sinusoidale**.**

Un segnale periodico può svilupparsi in serie di Fourier, cioè in una somma di infinite sinusoidi che può essere troncata a quella armonica la cui ampiezza ha valore trascurabile per gli strumenti e i sensi dell'uomo.

Pertanto, è sempre lecito considerare il segnale modulante come costituito da singole sinusoidi. Per semplicità esaminiamo una sola di queste armoniche la cui funzione matematica si può esprimere indifferentemente sia in seno che in coseno.

Ad esempio:

PORTANTE:	MODULANTE:	
$v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$	$v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$	Con: $\omega_p >> \omega_m$

Nella modulazione di frequenza (FM), l'ampiezza del segnale modulato è mantenuta costante ed eguale al valore della portante a riposo $\mathbf{V_p}$:

La frequenza invece varia, proporzionalmente all'ampiezza istantanea del segnale modulante ed il massimo scarto di frequenza, rispetto alla frequenza portante a riposo si chiama **Δf** e, in Europa, è uguale a **75 kHz** essendo stato normalizzato nel 1961.

La rapidità con cui avviene tale variazione è determinata dalla rapidità della legge di variazione nel tempo del segnale modulante stesso, ω_m

Pertanto, mentre nella portante a riposo:

$$v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$$

la pulsazione ω_p ha valore costante, nel segnale modulato la nuova pulsazione deve essere proporzionale, secondo una costante K_F caratteristica del modulatore, all'ampiezza del segnale modulante:

$$v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$$

Dunque la pulsazione istantanea del segnale modulato in FM deve avere la forma:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + K_F V_m \cos \omega_m t = 2\pi\left(f_p + \frac{K_F V_m}{2\pi} \cos \omega_m t\right) = 2\pi\left(f_p + \Delta f \cos \omega_m t\right)$$

$$\Delta f = \frac{K_F V_m}{2\pi}$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$d\varphi(t) = \omega(t) dt$$

$$\varphi(t) = \int \left(\omega_p + K_F V_m \cos \omega_m t\right) dt = \omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen \omega_m t$$

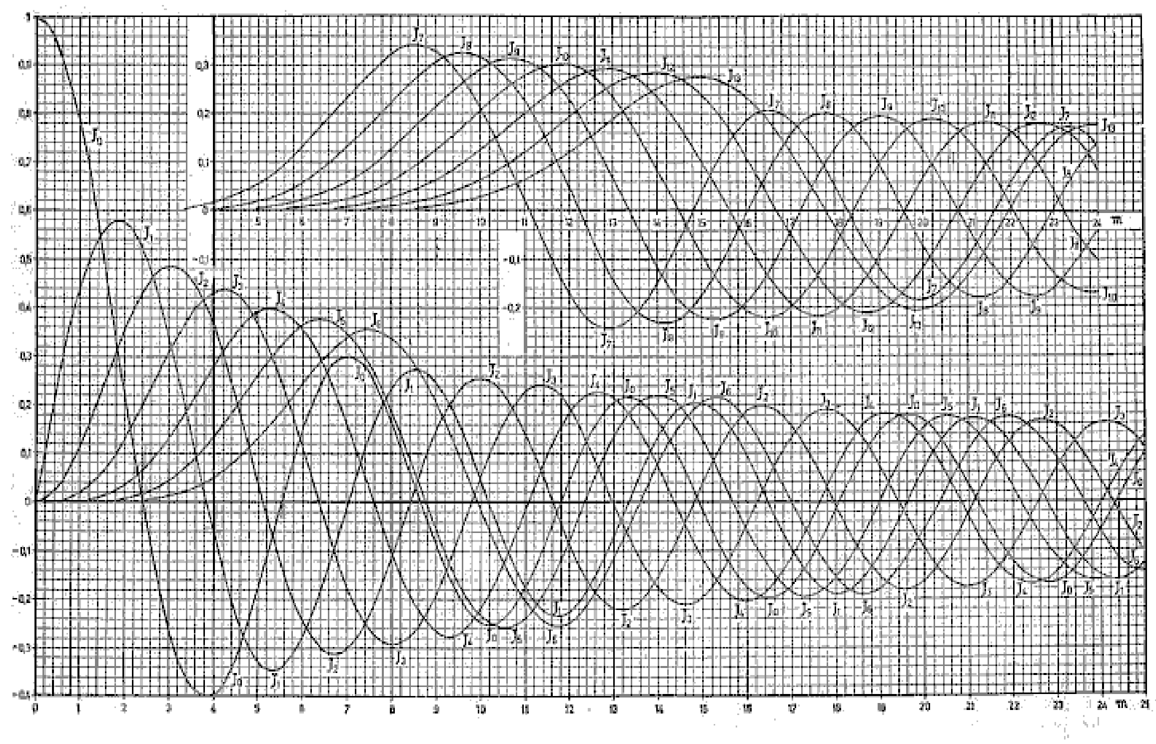
$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen\, \omega_m t\right) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

$$m = \frac{K_F V_m}{\omega_m} = \frac{K_F V_m}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

In base alla serie di Bessel si dimostra che il segnale suddetto, rappresentante la modulazione in frequenza di una portante sinusoidale con una modulante sinusoidale, è rappresentato da infinite sinusoidi secondo l'espressione matematica:

$$\begin{aligned}
v(t) &= V_p J_0(m) sen\, \omega_p t + \\
&+ V_p J_1(m)\left[sen(\omega_p + \omega_m)\, t - sen(\omega_p - \omega_m)\, t\right] + \\
&+ V_p J_2(m)\left[sen(\omega_p + 2\omega_m)\, t + sen(\omega_p - 2\omega_m)\, t\right] + \\
&+ V_p J_3(m)\left[sen(\omega_p + 3\omega_m)\, t - sen(\omega_p - 3\omega_m)\, t\right] + \\
&+ V_p J_4(m)\left[sen(\omega_p + 4\omega_m)\, t + sen(\omega_p - 4\omega_m)\, t\right] + \ldots
\end{aligned}$$



Sull'asse delle ascisse vi è l'indice di modulazione *m***,** e sulle ordinate le funzioni di Bessel J_0, J_1, J_2, ...

Le funzioni di Bessel possono assumere valori inferiori a 1 in modulo ed anche il valore 0.

Si deduce che per alcuni valori dell'indice di modulazione *m***,** alcune righe dello spettro del segnale modulato in FM possono sparire.
Si chiamano zeri di Bessel quei valori dell'indice di modulazione m (2,4; 5,5; 8,7; 11,8; ecc.) che annullano J_0, per cui la trasmissione avviene in assenza di portante, e quindi con rendimento del 50%.

Abbiamo quindi visto che in contrasto alla modulazione di ampiezza, la modulazione angolare di un singolo tono produce una serie di armoniche. In altre parole AM è un processo lineare mentre FM non è un processo lineare.

2.4.2 Calcolo dello spettro del segnale modulato in FM

Per lo studio dello spettro, cioè dell'insieme di tutte le sinusoidi che rappresentano nel dominio della frequenza il segnale modulato, è più semplice fare un esempio.

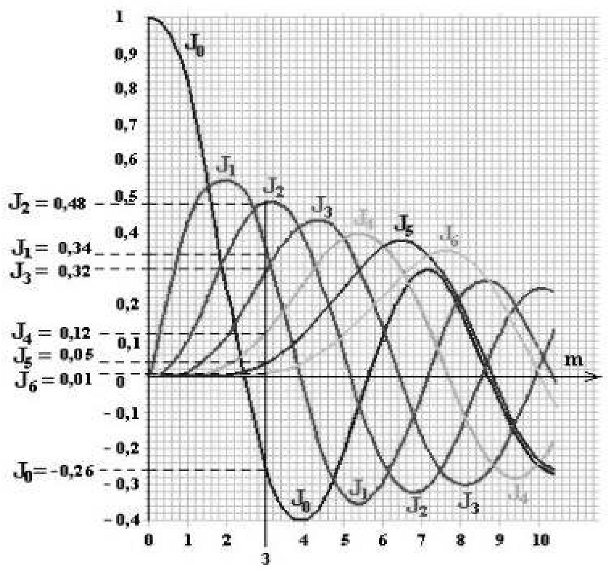
Si traccia lo spettro di un segnale in modulazione di frequenza (FM) con:

- **f_p=100 MHz**
- **f_m= 15 kHz**
- **Δf = 45 kHz**
- **V_p= 100 V**

Si determina il valore di **m** in base alla formula:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{45.000}{15.000} = 3$$

Si traccia, sul diagramma delle funzioni di Bessel, un segmento parallelo all'asse delle ordinate in corrispondenza del valore **m=3** dell'indice di modulazione e, dall'intersezione con tutte le curve **J_0, J_1, J_2, ...,** si determinano i valori che queste funzioni **J_0, J_1, J_2, ...,** assumono come è schematicamente indicato nella figura sotto:



Risulta, dal grafico:

J_0 = - **0,26**

J_1 = **0,34**

J_2 = **0,48**

J_3 = **0,32**

J_4 = **0,12**

J_5 = **0,05**

J_6 = **0,01**

E quindi le ampiezze delle righe spettrali, in **Volt** *sono:*

$J_0 V_p = |-0{,}26| \cdot 100 = 26V$

$J_1 V_p = 0{,}34 \cdot 100 = 34V$

$J_2 V_p = 0{,}48 \cdot 100 = 48V$

$J_3 V_p = 0{,}32 \cdot 100 = 32V$

$J_4 V_p = 0{,}12 \cdot 100 = 12V$

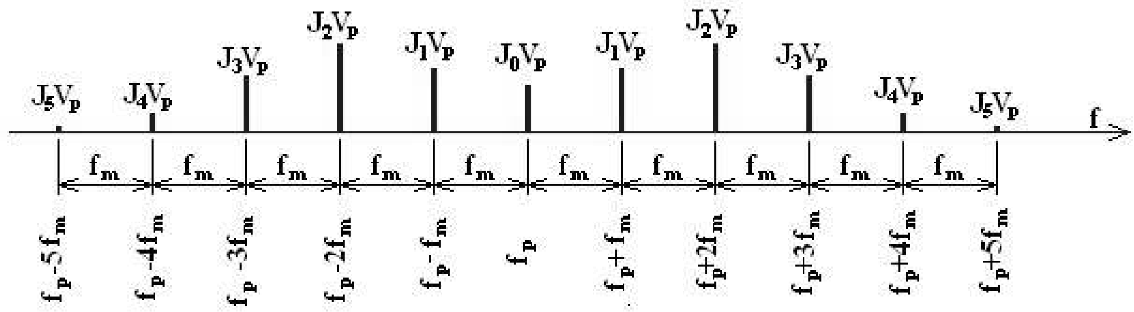
$J_5 V_p = 0{,}05 \cdot 100 = 5V$

Si definisce larghezza di banda di un segnale FM l'insieme delle frequenze di valore significativo che lo costituiscono e cioè, nel caso in esame, di ampiezza superiore all'**1%** della portante non modulata.

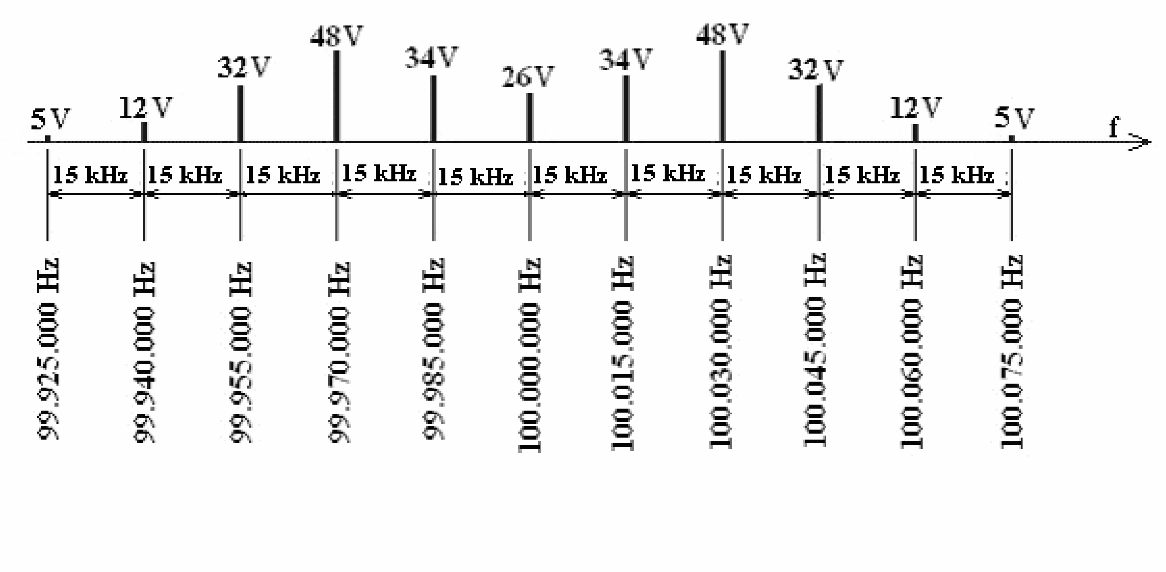
Nel caso in esame, osservando che nelle funzioni di Bessel il valore di riferimento della portante non modulata, cioè $\mathbf{J_0}$ con **m=0** è uguale a **1**, si stabilisce di considerare come facenti parte integrante della banda del segnale modulato in FM soltanto quelle funzioni di Bessel il cui valore in corrispondenza al valore di **m** prescelto, sia superiore, in modulo, a **0,01**.

Ecco perché in questo esempio si è escluso $\mathbf{J_6}$, sesta funzione di Bessel e le successive.

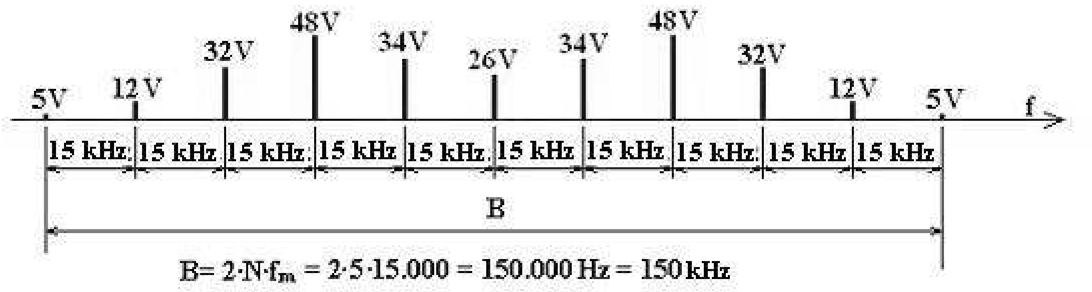
Ottenuti i valori delle funzioni di Bessel, si traccia la banda del segnale modulato in FM:



Lo stesso, con i valori numerici risulta:



Nell'esempio considerato la larghezza di banda è la seguente:



La formula per determinare la larghezza di banda in FM è dunque:

$$B = 2 \cdot N \cdot f_m$$

Per determinare però la larghezza di banda occorre conoscere i diagrammi delle funzioni di Bessel, cosa che è possibile solo disponendo di un buon analizzatore di spettro.

Si può calcolare la larghezza di banda, sia pure in modo approssimativo, senza disporre né dell'analizzatore di spettro, né delle funzioni di Bessel, usando una formula empirica, dovuta a Carson:

$$B = 2(\Delta f + f\ m\ max)$$

dove Δf è il massimo scarto in frequenza rispetto alla portante a riposo, e $f_{m\ max}$ è la massima frequenza modulante.

Questa formula è tanto più esatta, quanto più **m** è grande, mentre per **m** piccolo non è molto precisa.

Nel caso dell'esempio precedente avrebbe dato:

$$B = 2(45.000 + 15.000) = 120.000\ Hz$$

2.4.3 Misurazioni in FM con l'analizzatore di spettro

In pratica, lo spettro di un segnale FM non è infinito.

Le ampiezze dello spettro diventano trascurabili oltre ad una certa frequenza al variare dell'indice di modulazione β

$$\beta = \Delta f_p / f_m = \Delta \phi_p$$

dove

β = indice di modulazione

Δf_p = deviazione di frequenza di picco

f_m = frequenza del segnale modulante

$\Delta\varphi_p$ = deviazione di fase di picco

Ora si veda il comportamento spettrale di un segnale FM per valori diversi di β. Nella figura seguente si vedono gli spettri di un segnale per β = 0.2, 1, 5, e 10

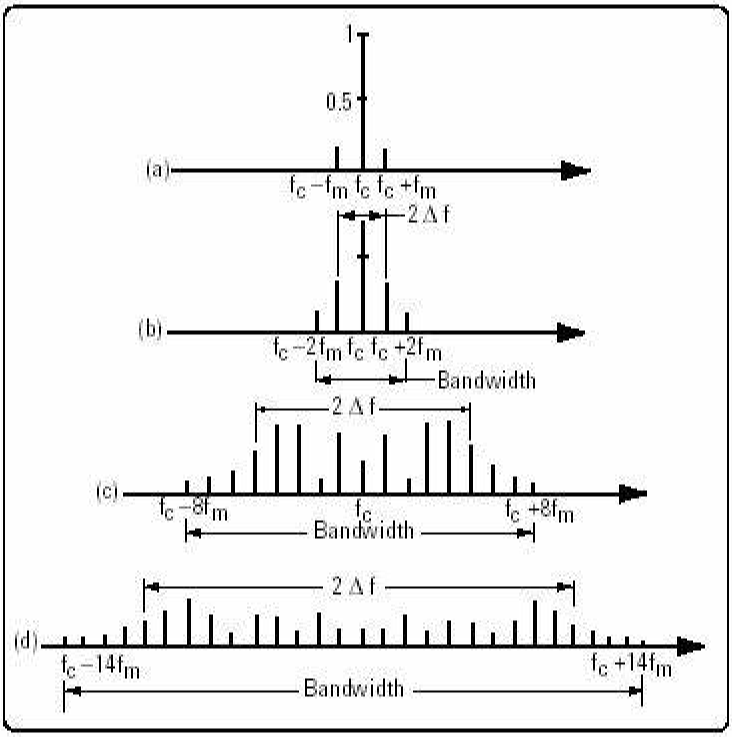
Spettro di un segnale FM (segnale modulante sinusoidale f_m fissato, ed ampiezza Δf_p variante)

(a) β = 0,2

(b) β = 1

(c) β = 5

(d) β =10



Il segnale modulante sinusoidale (*tono*) ha la frequenza costante f_m, così β è proporzionale alla sua ampiezza. Nella figura seguente, l'ampiezza del segnale modulante è mantenuto costante e β è variato cambiando la frequenza modulante f_m

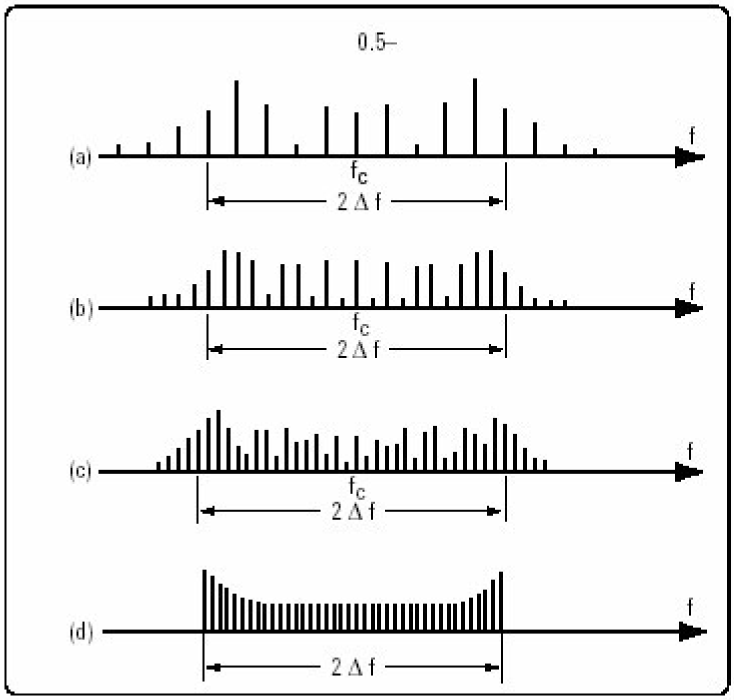
Spettro di un segnale FM (ampiezza Δf_p fissato, e segnale modulante f_m variante)

(a) $\beta = 5$

(b) $\beta = 10$

(c) $\beta = 15$

(d) $\beta \rightarrow \infty$

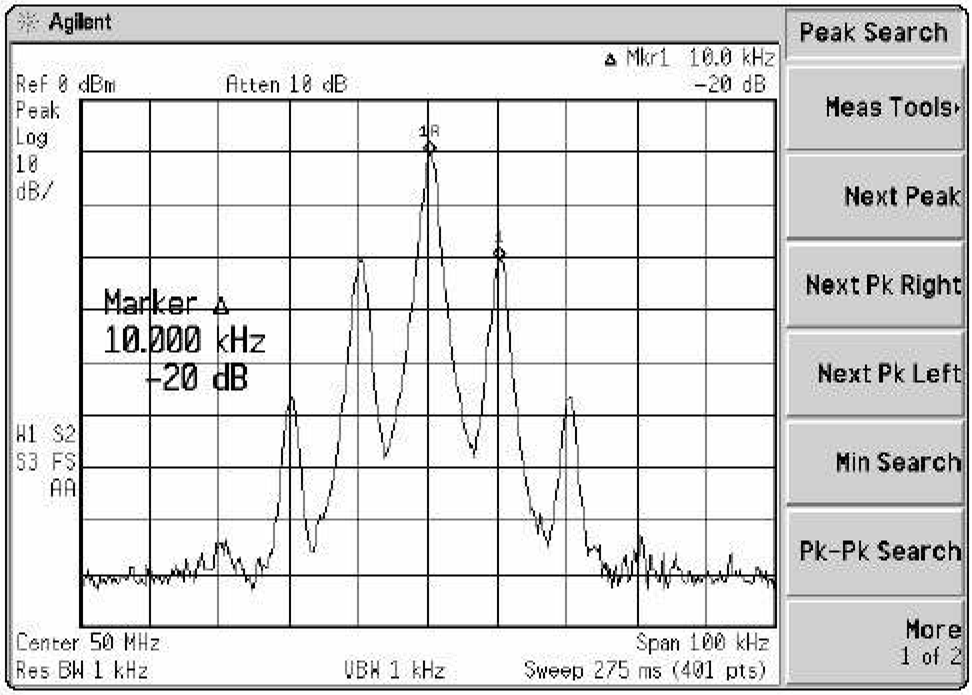


Due importanti fatti emergono dalle figure precedenti:

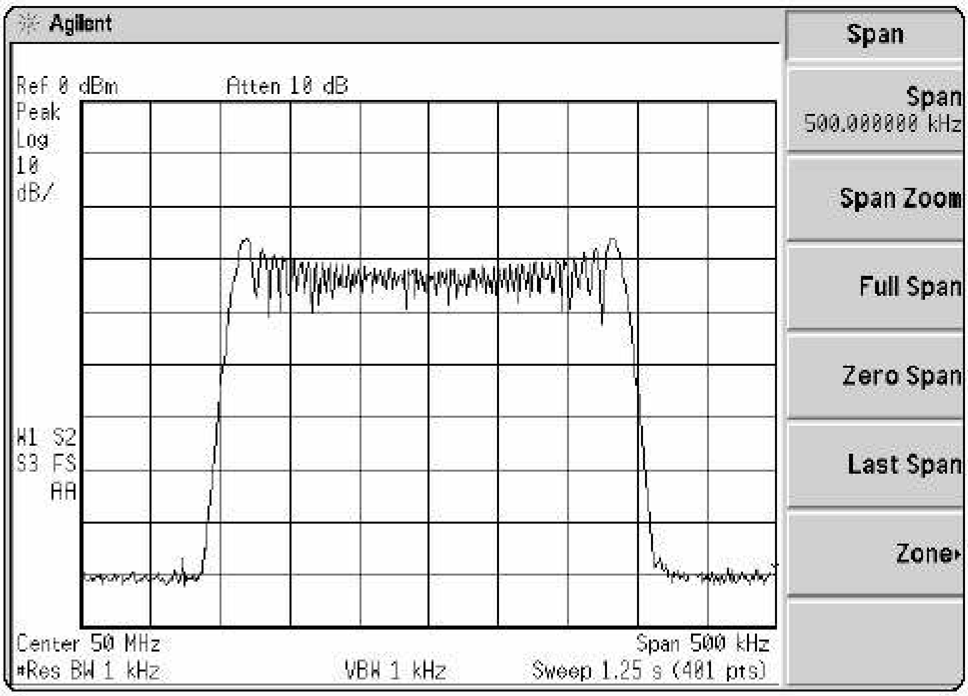
- Per un indice di modulazione molto basso (β meno di 0.2) si trova il doppio della larghezza di banda del segnale modulante. La richiesta di larghezza di banda in questo caso è il doppio di f_m, come per una AM.
- Per un indice di modulazione molto alto (β più di 100), la larghezza di banda è due volte Δf_p

Le figure che seguono mostrano il display dell'analizzatore con due segnali FM, rispettivamente uno a β=0.2 e l'altro a β=95

Portante modulata a 50 MHz con f_m = 10 kHz e β = 0,2



Portante modulata a 50 MHz con f_m = 1,5 kHz e β = 95



Si può calcolare la necessaria larghezza di banda B usando la seguente approssimazione:

$$B = 2\,\Delta f_{peak} + 2\,f_m$$

oppure

$$B = 2\,f_m\,(1 + \beta)$$

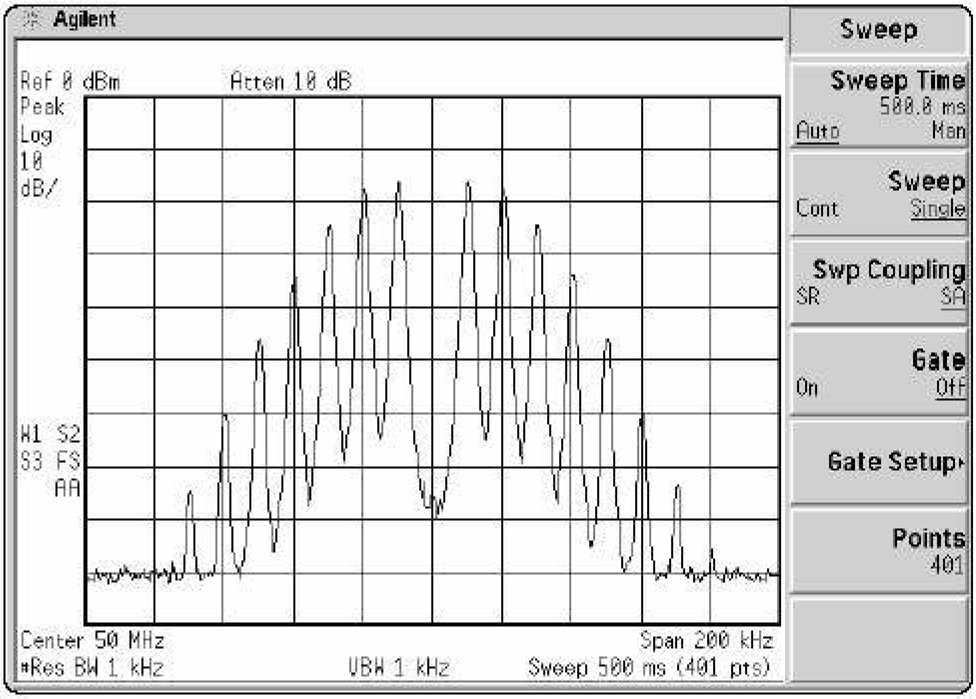
Una stazione FM ha una massima deviazione di frequenza (determinata dalla massima ampiezza del segnale modulante) di Δf_{picco} = 75 kHz. La più alta frequenza del segnale modulante f_m è 15 kHz. Questa combinazione produce un indice di modulazione β=5 ed il segnale risultante ha una larghezza di banda uguale 8 volte il doppio della banda del segnale modulante. Così la larghezza di banda può essere calcolata come 2 x 8 x 15 Hz = 240 kHz. Per frequenza di modulazione al di sotto dei 15 kHz (con la stessa ampiezza), l'indice di modulazione aumenta più di 5 e la larghezza di banda eventualmente si avvicina 2 Δf_{picco} = 150 kHz

Si può, quindi, calcolare la larghezza di banda richiesta in trasmissione usando la più alta frequenza in modulazione f_m e la massima deviazione di frequenza di picco Δf_{picco}

L'analizzatore di spettro è uno strumento molto utile per misurare il Δf_{picco} e β.

Nella figura successiva si mostra una modulazione di frequenza di 10 kHz ed un indice di modulazione β=2,4 con una deviazione di frequenza Δf_p=24 kHz

Questo è lo spettro di un segnale FM a 50 MHz. La f_m è 10kHz, di conseguenza Δf_p=2,4x10kHz =24kHz



Siccome si può settare con precisione la frequenza modulata usando un analizzatore di spettro e siccome l'indice modulazione è anche conosciuto, la deviazione di frequenza così generata sarà ugualmente precisa.

2.5 Modulazione numerica

Si chiamano modulazioni numeriche quel tipo di modulazioni in cui il segnale modulante è di tipo numerico, vengono impiegate nella trasmissione dati fra modem, nei ponti radio, nei cellulari, nei collegamenti via satellite.