Capitolo 1

Analisi spettrale analogica e numerica

1.1 Introduzione

Le misure sui segnali rivestono sicuramente un ruolo fondamentale in tutti i campi di ricerca. Fondamentale è l'analisi dello spettro di un segnale, che consente di ricavare una serie d'informazioni difficili da ottenere nel dominio del tempo mediante l'uso di un semplice oscilloscopio.

Per comprendere l'importanza dell'analisi in frequenza di un segnale basta pensare al fatto che tutta la teoria delle telecomunicazioni si basa sulla trattazione dei segnali nel dominio della frequenza: posizione e ampiezza di una portante, larghezza di banda di un segnale modulato, quantità di rumore presente su un canale, distorsioni armoniche e di intermodulazione, sono soltanto alcune delle informazioni ricavabili dall'osservazione dello spettro di un segnale.

L'ambito delle radiofrequenze si inserisce perfettamente in questa panoramica, basta pensare all'attuale volume delle comunicazioni radiomobili, delle trasmissioni via satellite, o dei collegamenti via cavo ad alta velocità, e al fatto che questi sistemi si stiano muovendo verso frequenze di lavoro sempre più elevate, per rendersi conto dell'importanza della misura come strumento di verifica e validazione dei risultati ottenuti.

In quasi tutti i settori della scienza e della tecnologia occorre elaborare il segnale per facilitare l'estrazione dell'informazione, pertanto lo sviluppo di tecniche e sistemi di elaborazione del segnale è di grande importanza.

Spesso queste tecniche hanno come scopo la trasformazione del segnale in un altro segnale che, per qualche motivo, risulta più vantaggioso del segnale originale.

In seguito verranno analizzati gli aspetti più generali dell'analisi numerica con particolare attenzione alla trasformazione del segnale dal dominio del tempo a quello delle frequenze.

1.2 I segnali

I segnali sono variazioni di grandezze fisiche che trasportano informazioni.

Un segnale può essere definito come una funzione o una grandezza variabili nei confronti di una o più grandezze appartenenti ad un particolare dominio e contenente informazioni che riguardano in generale lo stato o il comportamento di un sistema fisico. Ad esempio il segnale può essere costituito dall'insieme delle variazioni di una grandezza nel tempo o nello spazio.

Matematicamente i segnali sono rappresentati come funzioni di una o più variabili. Per esempio un segnale vocale può essere rappresentato come un livello di pressione sonora funzione del tempo ed una fotografia può essere rappresentata come una livello di luminosità funzione di due variabili spaziali.

La variabile indipendente della rappresentazione matematica di un segnale può essere discreta o continua.

Esistono quindi due tipi di segnali: i segnali a tempo continuo e quelli a tempo discreto.

I primi sono segnali il cui andamento è descritto da una funzione continua definita su un insieme continuo. I secondi sono dei segnali in cui la variabile indipendente assume solo valori discreti sono in altre parole dei segnali che possono essere intesi come delle sequenze di numeri.

Oltre al fatto che le variabili indipendenti possono essere discrete o continue può inoltre accadere che anche il valore del segnale sia discreto o continuo. I segnali numerici (quelli che poi vengono elaborati da un processore) sono segnali discreti sia nel tempo (variabile indipendente) sia in ampiezza.

Le telecomunicazioni studiano la trasmissione di informazioni a distanza per mezzo di segnali che possono essere di vario tipo: acustico, elettrico, luminoso, elettromagnetico, ecc.

Esaminiamo, quale esempio, un sistema tipo di trasmissione telefonica.

L'uomo a sinistra, parlando, emette onde sonore che attraversano l'aria e colpiscono il microfono generando una corrente elettrica di forma del tutto analoga alle variazioni di pressione sonora prodotte nell'aria dalla sua voce.

Le centrali telefoniche possono essere collegate fra loro sia in fibra ottica che in ponte radio, come indicato in figura, pertanto il segnale deve adattarsi al mezzo trasmissivo e diviene dapprima segnale luminoso nella fibra ottica e, dopo, onda elettromagnetica fra l'una e l'altra antenna del ponte radio.

Inversamente, in ricezione, deve nuovamente riconvertirsi dapprima in segnale luminoso, poi in elettrico ed infine in sonoro per essere recepito dalla destinataria tramite il ricevitore telefonico.

Durante tutte queste conversioni da una natura all'altra, il segnale deve però mantenere sempre assolutamente costante l'unica cosa che veramente lo caratterizza: l'informazione che trasporta, perché è questa che il primo utente vuole comunicare al secondo utente senza, come è naturale, nessuna variazione.
Durante questa trasmissione, inoltre, il segnale, deve essere difeso da disturbi esterni, quali interferenze, rumore, diafonie, distorsioni, ecc. che ne altererebbero la forma e quindi l'informazione.

È necessario, quindi, uno studio accurato del segnale per individuarne tutte le caratteristiche informative in esso contenute, perché rimangano inalterate lungo la trasmissione fino a destinazione.

Il segnale può essere studiato dunque da due punti di vista diversi:

Nel dominio del tempo, attraverso la sua forma d'onda. Lo strumento idoneo per questo studio è l'oscilloscopio. 	Nel dominio della frequenza, attraverso il suo spettro. Lo strumento idoneo in questo caso è l'analizzatore di spettro. 

OSCILLOSCOPIO Agilent 54833D 1 GHz Mixed-Signal Infiniium	**ANALIZZATORE DI SPETTRO** Anritsu Model: MS2687B

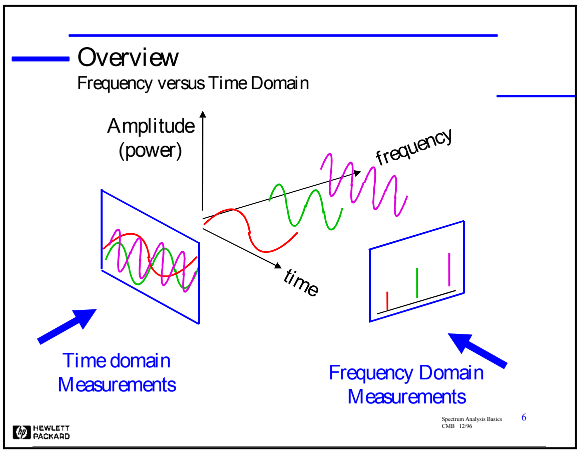
1.3 Dominio del Tempo e Frequenza

Il modo tradizionale di osservare un segnale è visualizzarlo nel dominio del tempo.

Il dominio del tempo possiamo vederlo come una sorta di "registrazione" di ciò che accade ad un parametro di un sistema nello scorrere del tempo.

Tipicamente è molto pratico convertire il parametro di interesse in un segnale elettrico tramite opportuni trasduttori. Tale segnale elettrico può essere allora registrato o visualizzato tramite magari un oscilloscopio.

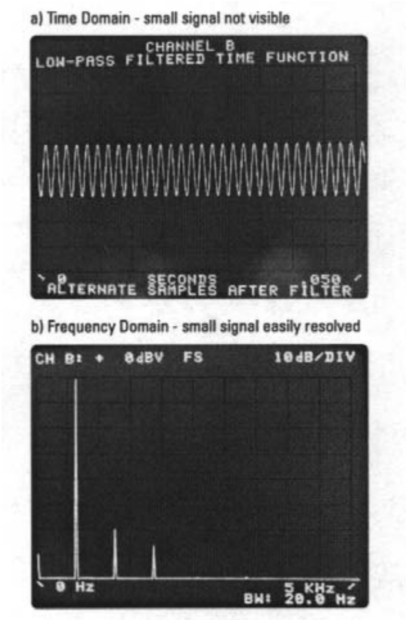
Rappresentare i segnali nel dominio del tempo significa individuare e descrivere il loro andamento istante per istante. La variazione della forma d'onda in funzione del tempo può essere intesa come l'insieme dei punti dei valori assunti dall'ampiezza di una grandezza elettrica in ogni istante. Tali punti si chiamano "valori istantanei"



Il dominio della frequenza può sembrare a prima vista innaturale ma comunque è una parte importante della nostra vita quotidiana. Basti pensare all'accoppiata orecchio – cervello che costituisce un eccellente analizzatore di frequenza. Infatti tale sistema suddivide la banda audio in molte bande limitate e determina la potenza presente in ciascuna banda. Può inoltre discriminare piccoli suoni immersi in un sottofondo rumoroso grazie alla sua capacità di analisi in tale dominio.

Pertanto il dominio della frequenza è abbastanza comune, ma non siamo abituati a visualizzarlo in maniera grafica.

E' importante sottolineare il fatto che non si perdono informazioni sul segnale passando da un dominio all'altro, ma lo si rappresenta solo in maniera differente.



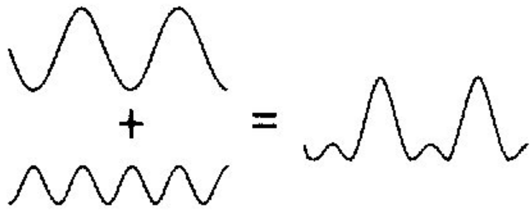
La possibilità di avere una prospettiva diversa però risulta essere molto utile.

Supponiamo ad esempio di voler misurare il livello di distorsione in un oscillatore audio. In tal caso stiamo provando a individuare una piccola onda sinusoidale in presenza di un segnale molto più ampio.

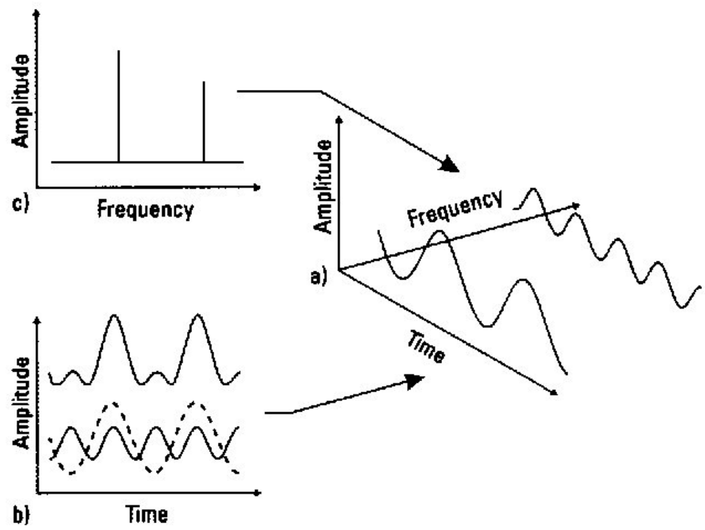
I rispettivi domini (figure a lato) mostrano il segnale composto da un tono sinusoide ed altre componenti sinusoidali sovrapposte (distorsioni). Quando queste componenti sono separate nel dominio della frequenza sono facilmente individuabili perché non sono più mascherate dalle altre più grandi.

1.4 Trasformata di Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier, matematico francese, nato nel 1768 ad Auxerre, e morto a Parigi nel 1830, dimostrò che una funzione periodica può essere espressa tramite una serie di funzioni trigonometriche secondo il teorema che prende il suo nome:



"Qualunque segnale periodico è scomponibile nella somma di un eventuale termine costante (valor medio) e di segnali sinusoidali, dei quali uno ha la stessa frequenza del segnale considerato (prima armonica o fondamentale) e gli altri hanno frequenza multiple (armoniche superiori)"

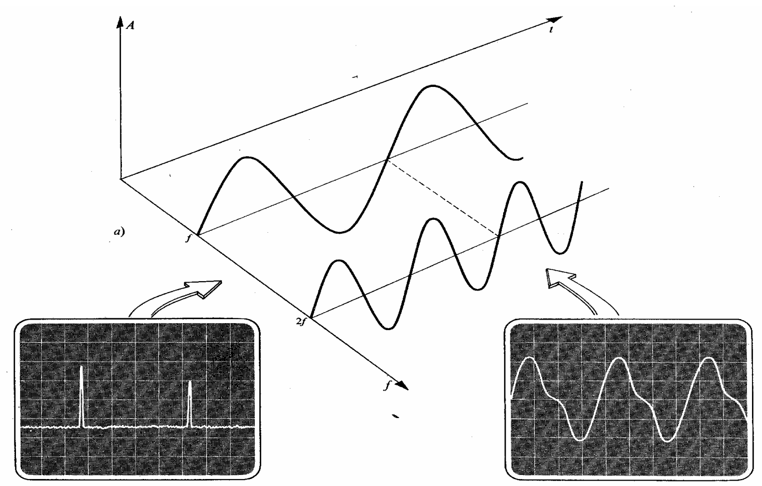


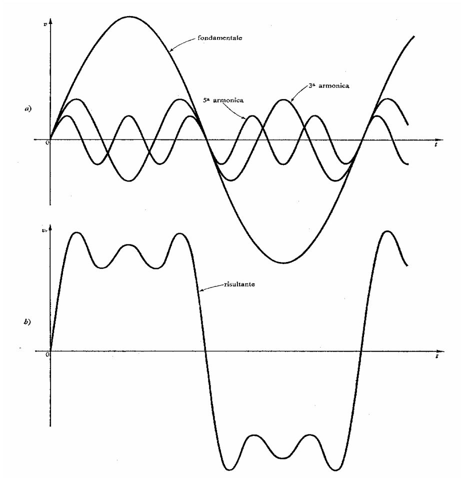
Per comprendere meglio il teorema di Fourier prendiamo in esame la Figura a) accanto in cui i segnali non sono rappresentati non su un piano cartesiano ma in modo 3D, introducendo l'asse delle frequenze. In tal modo i segnali vengono rappresentati nel loro sviluppo temporale, ma posizionati sull'asse della frequenza, in corrispondenza del valore di questo parametro. La proiezione di questi due segnali sul piano ampiezza frequenza darà *"spettro"* del segnale in questione.

La Figura b) invece riporta la composizione dei due segnali nel piano ampiezza tempo in modo da formare un segnale unico risultante, determinato dalla somma istante per istante dei due segnali di ampiezza A_1 e A_2 e frequenza l'uno il doppio dell'altro.

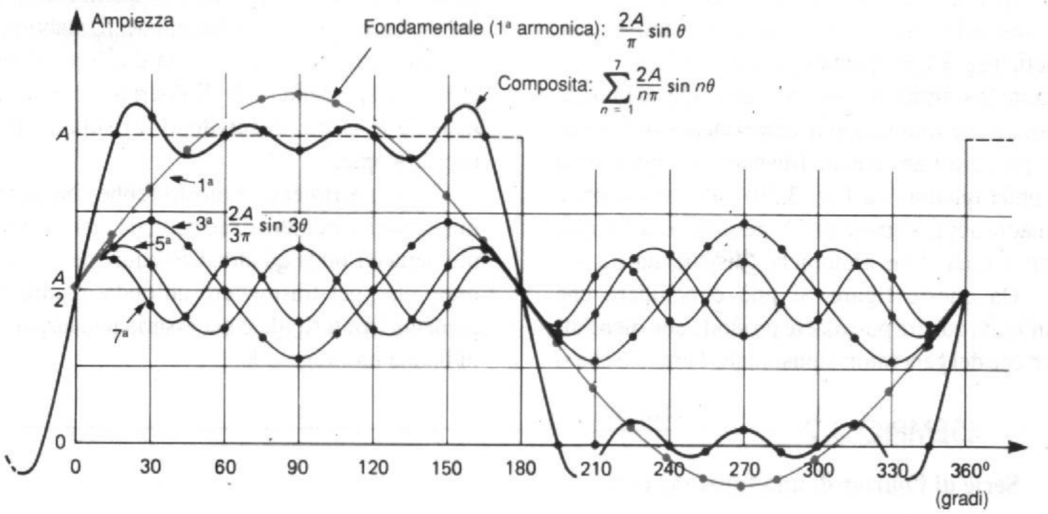
La somma dei due segnali ricompone, approssimativamente, il segnale non armonico.

L’approssimazione dipenderà in genere dal numero di armoniche considerate.





Per una onda quadra buone approssimazioni si ottengono considerando fino alla settima armonica, mentre per approssimazioni ottimali si devono valutare almeno undici armoniche.



Quindi, secondo il teorema di Fourier, una funzione periodica **y(t)** è sviluppabile in una serie costituita da un termine costante $\mathbf{A_0}$ e da una somma di infinite sinusoidi:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)$$

le cui frequenze $\mathbf{f_n}$ sono multiple intere della frequenza $\mathbf{f_0}$ della funzione data:

$$f_0 = \frac{1}{T} \qquad f_n = n\, f_0$$

e di ampiezze $\mathbf{A_n}$ e $\mathbf{B_n}$ calcolabili secondo le formule:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \qquad A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

Le funzioni aperiodiche possono essere concepite come funzioni periodiche allorché il periodo tende a crescere fino all'infinito.

Allora la distanza fra due righe dello spettro a righe tende a zero e lo spettro diventa a bande continue.

La serie di Fourier si trasforma in un integrale che assume il nome di Trasformata di Fourier, che rappresenta la distribuzione continua delle frequenze presenti in un segnale aperiodico.

Quindi, se il segnale in esame non è periodico (e quindi si può assumere il suo periodo T come infinito) si può ricorrere all'integrale di Fourier che porta ad una funzione continua nel dominio della frequenza sia per quanto riguarda l'ampiezza sia per quanto riguarda la fase.

Questo accade perché le varie armoniche dello sviluppo in serie si avvicinano sempre più tra loro, fino al punto che le righe spettrali divengono indistinguibili.

1.5 Metodi di analisi in frequenza

I metodi per l'analisi in frequenza dei segnali possono essere a grandi linee classificati secondo due metodi fondamentali: analogici o digitali.

I metodi analogici più utilizzati sono: il metodo del "*filtro passabanda*", il metodo del "*filtro con sweep in frequenza*" ed il metodo del "*filtro selettivo fisso e spostamento in frequenza del segnale da analizzare*" o detta anche "*a tecnica supereterodina*"

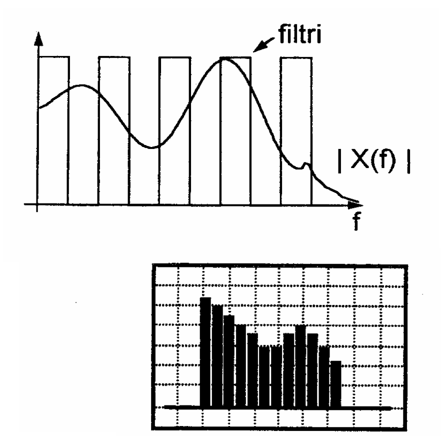
I metodi di tipo digitale si basano tutti sull'utilizzo di analizzatori che sfruttano l'algoritmo FFT.

1.5.1 Metodo del Filtro Passa Banda

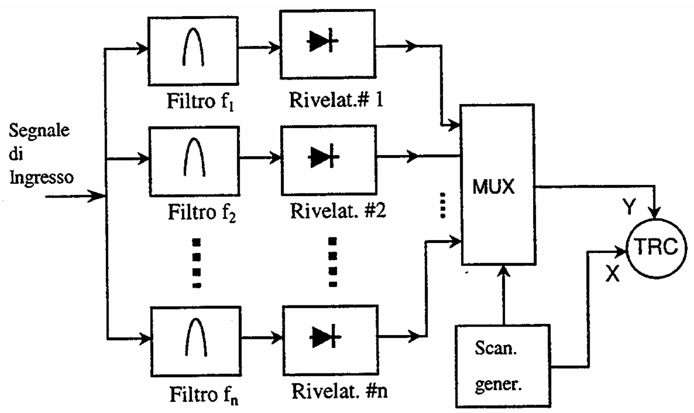
Questo metodo di analisi in frequenza è stato utilizzato per molti anni.

Rappresenta una tecnica di analisi molto facile da implementare, ma è incapace di fornire un analisi ad elevata risoluzione ed inoltre è richiesto un filtro passa banda per ognuna della frequenze che deve essere analizzata.

La soluzione per esaminare contemporaneamente le risposte a più frequenze prende il nome di ***analizzatore di spettro real time***.



Rappresentazione dello spettro con analizzatore real-time



Schema di principio di un analizzatore ***real-time***

Ogni filtro è centrato alla frequenza di interesse per recuperare il solo contenuto informativo nella singola banda desiderata.

Tuttavia, se il numero di componenti di interesse aumenta a dismisura (come nel caso di segnali transitori) non è opportuno ritenere di poter eseguire numerose operazioni di filtraggio in tempi diversi, per poi collezionare queste informazioni come unico risultato di misura; tale risultato potrebbe, infatti, essere uno specchio poco fedele del segnale in analisi

Sappiamo, infatti, che i segnali transitori, in quanto dotati di banda illimitata, sono caratterizzati da un numero teoricamente infinito di componenti spettrali.

Quindi solo nell'ipotesi, abbastanza verosimile, che queste componenti siano trascurabili da un certo valore di frequenza in poi, si può ritenere che lo spettro del segnale sia contenuto in un campo finito di frequenze.

Relativamente a questa soluzione, si osserva che i filtri passabanda lavorano in parallelo.

La banda passante di ciascun filtro, ovvero la risoluzione in frequenza del filtro, è tale da evitare eventuali sovrapposizioni con le bande adiacenti.

A valle dei filtri sono presenti rilevatori che restituiscono un segnale continuo di valore pari al valore efficace del segnale al loro ingresso. In ingresso al multiplexer, quindi, vi saranno vari livelli di tensione, ciascuno dei quali rappresenta l'ampiezza dello spettro del segnale di ingresso in una ben precisa banda di frequenze. Il generatore di scansione stabilisce per ogni istante di tempo quale uscita dei rivelatori deve essere visualizzata.

Visualizzare lo spettro di un segnale significa operare su di un diagramma frequenze (asse orizzontale) - ampiezze (asse verticale). Operando una scansione orizzontale dello schermo (come nel caso degli oscilloscopi) occorre, quindi, creare una corrispondenza tra tempo di scansione e campo di frequenze e, più specificatamente, tra istanti di tempo di scansione e valori di frequenze di analisi. Per l'analizzatore in questione, ciò si traduce nell'abilitare, tramite lo stesso generatore di scansione, l'uscita di ciascun rivelatore in istanti di tempo differenti; è possibile così creare una corrispondenza tra questi istanti e le frequenze centrali dei filtri il cui rivelatore è stato abilitato nel medesimo istante.

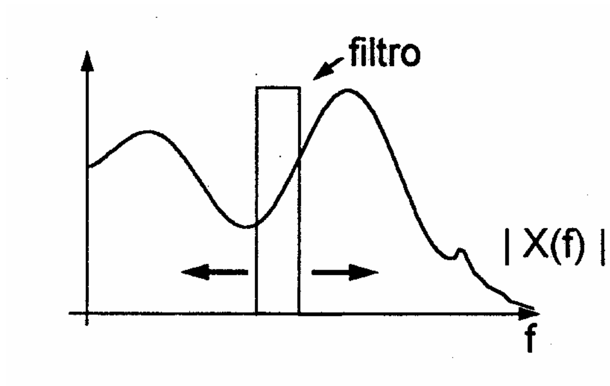
Questo strumento è particolarmente indicato per l'analisi dei segnali le cui caratteristiche spettrali evolvono nel tempo, in quanto, come già detto, consente il prelievo contemporaneo di tutte le informazioni dello spettro.
Tuttavia, la richiesta di una sempre maggiore risoluzione spinge verso l'utilizzo di un numero crescente di filtri, di qualità sempre superiore (banda stretta), con conseguente aggravio dei costi dell'analizzatore. Inoltre, i filtri peggiorano in risoluzione all'aumentare della frequenza, cosicché non è perseguibile la strategia di realizzare un analizzatore di spettro real time in un range di frequenze molto ampio, non solo per i costi ma anche per la qualità del risultato.

Ciò spiega il perché questa soluzione non è molto diffusa e le sue realizzazioni trovano giustificazione in applicazioni specifiche.

.

1.5.2 Metodo del Filtro con Sweep in Frequenza

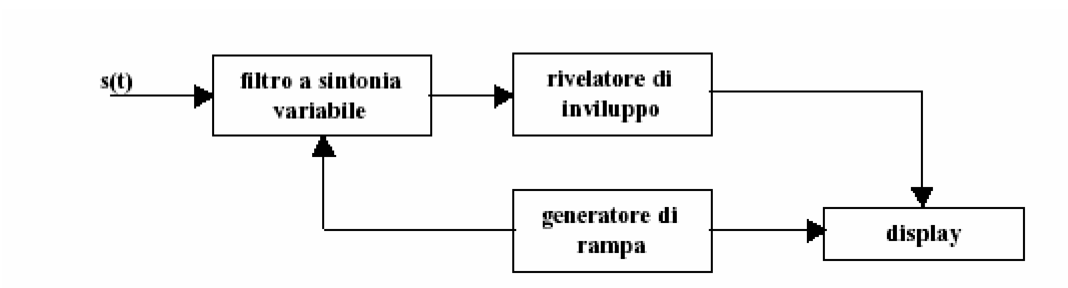
Per analizzare lo spettro di un segnale periodico una prima soluzione proposta è quella basata sul ***filtro a sintonia variabile***.



La tecnica impiegata da questo metodo è quella di utilizzare un unico filtro in grado di poter variare le frequenze centrali del filtro passa banda stesso in modo tale da permettere un'analisi in intervallo di frequenze più esteso. Permette larghezze di banda più ristrette (alta risoluzione), ma richiede un tempo assai lungo per l'analisi.

Questo unico filtro esamina un'ampia gamma di frequenze e si avvale di un controllo in tensione, talvolta esterno allo strumento, per regolare la propria frequenza centrale.

Lo schema a blocchi di un tale analizzatore è mostrato in figura.



Essa mostra, tra l'altro, la presenza del blocco "rivelatore di inviluppo", preposto al recupero dell'inviluppo del segnale in uscita al filtro.

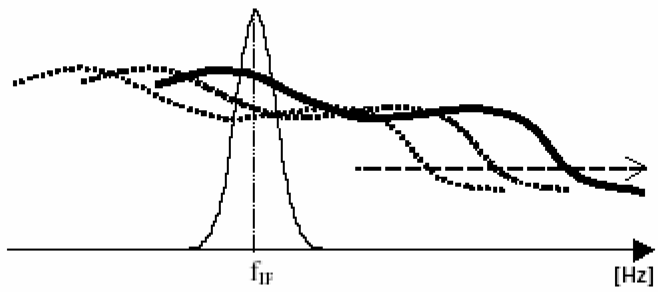
La rampa ottenuta dal generatore di scansione stabilisce il tempo di filtraggio, e regola il valore della frequenza che di volta in volta è analizzata. Nel tempo T, necessario per scandire tutto il display, viene analizzata una gamma di frequenze che vanno da f_0 *min* a f_0 *max*, dove f_0 è la frequenza a cui è centrato il filtro.

Le prestazioni di questo analizzatore sono fortemente limitate dall'impossibilità di mantenere costante la risoluzione del filtro sull'intero campo di frequenze di analisi. In particolare, maggiore è la frequenza centrale del filtro, meno spinta sarà la sua risoluzione.

1.5.3 Metodo del Filtro selettivo fisso e spostamento in frequenza del segnale da analizzare (analizzatore di spettro a supereterodina)

Per superare i limiti evidenziati dalle soluzioni precedenti, si ricorre alla tecnica di ***supereterodina***.

Questa soluzione prevede un filtro passabanda a frequenza intermedia f_{IF} fissa, ed una modulazione del segnale da analizzare, in modo che il suo spettro si sposti lungo l'intero asse delle frequenze. In pratica, l'effetto della modulazione è di traslare ciascuna componente dello spettro alla frequenza f_{IF}, e ciò è ottenuto mediante un segnale modulante di tipo sinusoidale con frequenza variabile linearmente nel tempo.



Il campo di frequenze richieste all'oscillatore locale per la corretta modulazione è generalmente indicato con f_o *min* ÷ f_o *max*, dove:

• f_o *min* è quel valore di frequenza che trasla a f_{IF} la componente a più bassa frequenza inferiore dello spettro del segnale d'interesse;

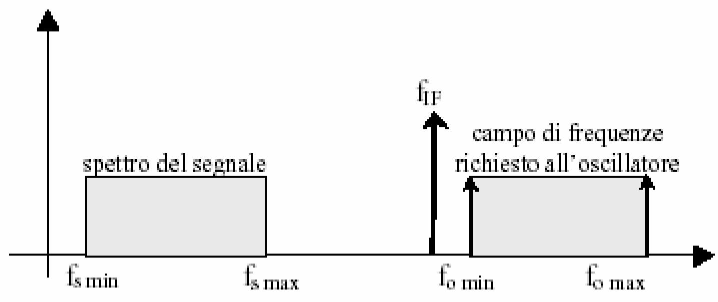
• f_o *max* è quel valore di frequenza che trasla a f_{IF} la componente a più alta frequenza superiore dello spettro del segnale d'interesse.

Analiticamente, detta f_s la frequenza della generica componente dello spettro del segnale, risulta:

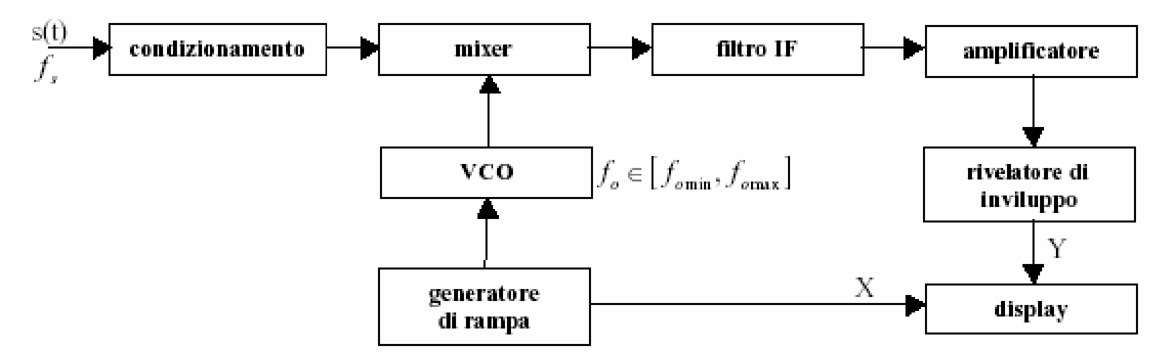
$$f_s = f_o - f_{IF}$$

ed in particolare $f_s\ min = f_o\ min - f_{IF}$ e $f_s\ max = f_o\ max - f_{IF}$.

Graficamente la situazione è rappresentata in figura:



Lo schema a blocchi dell'analizzatore di spettro a supereterodina è riportato in figura:



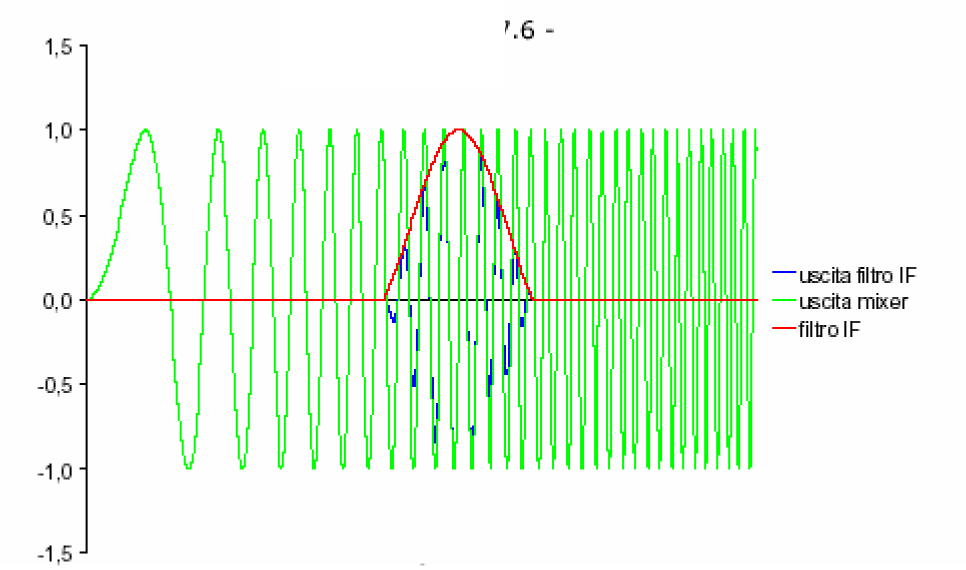
Sia, per semplicità, $s(t)=SM\cos(2\pi f_s t)$ il segnale di ingresso da analizzare. In uscita al VCO è presente un segnale, $v(t)=VM\sin(2\pi f_o t)$, con frequenza f_o variabile linearmente nel tempo. I segnali $s(t)$ e $v(t)$ producono in uscita al mixer la somma di due segnali sinusoidali, rispettivamente di frequenza f_o-f_s e f_o+f_s .

Per gli istanti di tempo t per cui risulta $f_o \pm f_s \neq f_{IF}$, non viene visualizzata alcuna traccia sul display. Viceversa, se per un certo istante t^* risulta $f_o \pm f_s = f_{IF}$, allora in corrispondenza di tale istante viene visualizzato il segnale in uscita al rilevatore di inviluppo.

Il funzionamento dell'analizzatore di spettro a supereterodina è, pertanto, il seguente: il generatore di rampa stabilisce la velocità con cui sono fornite dall'oscillatore locale le diverse frequenze f_o mediante le quali è modulato il segnale $s(t)$; quando la f_o è tale da soddisfare il legame tra la frequenza centrale f_{IF} del filtro ed il segnale $s(t)$, sullo schermo viene visualizzato un singolo tono.

Se il segnale di ingresso è dotato di uno spettro composito, la visualizzazione dei diversi toni avviene in corrispondenza di un insieme di f_o appartenenti a [f_o *min* , f_o *max*].

La figura seguente descrive qualitativamente il funzionamento del circuito,



dove per semplicità, si è riportata solo una delle due componenti sinusoidali in uscita al mixer (in verde), ad esempio quella a frequenza f_0+f_s, che è inviata al filtro a frequenza intermedia (il modulo della risposta in frequenza del filtro IF è riportato in rosso), fornendo il segnale riportato in blu. Quest'ultimo, grazie al rilevatore di inviluppo, produce un segnale la cui forma d'onda è, a meno di un fattore di scala, la riproduzione del modulo della risposta in frequenza del filtro IF.

Il segnale di tensione grazie al quale il pennello elettronico spazzola da sinistra verso destra tutto lo schermo è fornita, anche in questa configurazione, dal generatore di rampa. Pur avvenendo tutto il processo di analisi nel dominio del tempo, l'asse delle ascisse risulta comunque tarato in frequenza, in virtù del legame esistente tra il tempo e la frequenza in uscita al VCO. Tuttavia, essendo fissata la relazione $f_S=f_O-f_{IF}$, la lettura sull'asse è da intendersi come frequenza del segnale, e non come quella del VCO.

I vantaggi della soluzione a supereterodina sono:

1. L'uso del solo filtro a frequenza intermedia fissa consente di risolvere il problema della perdita di risoluzione alle alte frequenze; cambiando la sua banda è, inoltre, possibile ottenere diverse risoluzioni;
2. Gli amplificatori che lavorano in frequenza possono esibire elevate prestazioni;
3. E' possibile scandire ampi campi di frequenze.

I principali parametri di un analizzatore di spettro a supereterodina sono:

1. Range di frequenza – intervallo di frequenze analizzabili dallo strumento; gli analizzatori di spettro consentono, mediante il comando span, di analizzare porzioni di intervalli e, mediante il comando center frequency, di centrare sullo schermo la frequenza desiderata; la loro combinazione permette di studiare il segnale nell'intervallo desiderato;
2. Risoluzione in frequenza – banda a -3*dB* del filtro a frequenza intermedia; è la capacità di distinguere due toni della stessa ampiezza prossimi tra loro; sovente la risoluzione è regolabile, da un valore minimo ad uno massimo. È spesso indicata con RBW.
3. Selettività – capacità di distinguere componenti con diversa ampiezza a frequenze prossime tra loro;

essa si indica con:

$$S = \frac{B_{-60dB}}{B_{-3dB}}$$

in accordo con la convenzione di imputare alta selettività a bassi valori di S; il rapporto è il fattore di forma del filtro: indica quanto sono ripidi i suoi fronti per garantire la visualizzazione di un eventuale tono di ampiezza ridotta vicino a quello presente in f_{IF};

4. Range dinamico – massima differenza di ampiezza ammissibile tra due componenti affinché possano essere visualizzati distintamente;
5. Sensibilità – minima ampiezza che il segnale in ingresso deve avere per poter essere analizzato.

Spesso l'amplificatore a valle del filtro IF è di tipo logaritmico; ciò consente di aumentare il range di ampiezza visualizzabile. Non è consigliabile, tuttavia, utilizzare la scala in decibel per rappresentare le ampiezze, ma lo è per le potenze.

Detto A il rapporto di due potenze P1 e P2, il suo valore espresso in decibel è dato da:

$$A_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Ipotizzando che le potenze siano dissipate dalle tensioni *V1* e *V2* sulla stessa resistenza *R*, si ha:

$$A_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{V_1^2}{R}\frac{R}{V_2^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Pertanto, esprimere un rapporto di tensioni in *dB* significa aver ipotizzato che le due tensioni dissipino la stessa potenza sulla medesima resistenza.

L'unità di misura più diffusa negli analizzatori di spettro è il *dBm*. Esso è definito come:

$$P_{dBm} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1mW}\right)$$

e fornisce una informazione sulla potenza rispetto al riferimento di 1mW.

Una diffusa unità di misura, che prescinde dalle potenze, è il *dBV*. Un valore ha un'ampiezza pari ad A volt è equivalente in *dBV* tramite la seguente relazione:

$$A_{dBV} = 20\log_{10}\left(\frac{A}{1V}\right)$$

e fornisce il valore di tensione in dB, riferendo la tensione misurata ad 1V.

È sempre possibile creare, quindi, una unità di comodo che sia riferita ad un'unità di riferimento. Ad esempio, è possibile definire un dBT (dB tesla) per una misura di campo elettromagnetico in riferimento ad 1T, oppure un dBA (dB ampere) per una valutazione di intensità di corrente elettrica in riferimento a 1A. Si deve solo prestare attenzione ad utilizzare un fattore moltiplicativo, associato al logaritmo, che è 10 per le misure di potenze e 20 negli altri casi.

Il principale vantaggio che si ottiene nel rappresentare una grandezza in decibel è la velocità dei processi computazionali: lavorare con i logaritmi consente di avvalersi di utili proprietà, quali quelle del prodotto e della differenza.

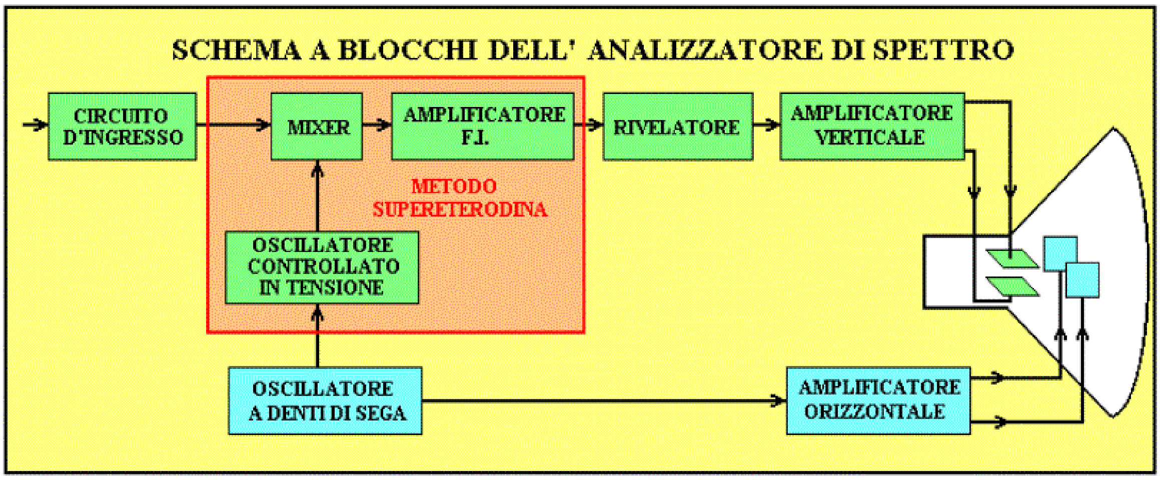
Si supponga, ad esempio, di voler conoscere il rapporto delle ampiezze di due componenti spettrali di un segnale, di cui una è la fondamentale. Questo rapporto prende il nome di livello armonico. La sua valutazione è immediata perché l'asse delle ordinate del display di un analizzatore di spettro può essere tarato in decibel; la differenza dei rispettivi valori fornisce, infatti, l'informazione cercata perché coincide, a meno di una divisione per un fattore noto (10 o 20) ed un antilogaritmo, con il rapporto desiderato.

1.6 Analizzatori di spettro analogici

L'analizzatore di spettro è uno strumento elettronico in grado di rappresentare lo spettro di ampiezza di un segnale tempo variante.
Le applicazioni più importanti di questo strumento riguardano lo studio e l'analisi armonica dei segnali; l'impiego è dunque fondamentale nelle tecniche delle radiodiffusioni, nella trasmissione dati e nella telemetria. Ad esempio, lo strumento consente di verificare con grande precisione la larghezza di banda ed il livello del segnale emesso da una sorgente, analogica o numerica, permettendo dunque il progetto dei canali di trasmissione, la determinazione dell'influenza del rumore, ecc. ecc.

L'analizzatore di spettro è uno strumento che fornisce l'immagine, sullo schermo di un tubo catodico, dello spettro di ampiezza di un segnale elettrico.

Lo schema a blocchi semplificato dello strumento è rappresentato di seguito.



L'analizzatore di spettro è uno strumento che consente l'analisi di un generico segnale nel dominio della frequenza. Grandezze tipiche rilevabili sono ad esempio il valore efficace, la potenza, il periodo, la forma d'onda e soprattutto l'andamento dello spettro. Nel campo delle telecomunicazioni tale strumento consente di effettuare alcune importanti misure quali ad esempio quelle relative alla modulazione, alla distorsione, al rumore ed al rapporto segnale-rumore (SNR).

Così come un segnale elettrico lo si può visualizzare nel dominio del tempo con un oscilloscopio, analogamente con un analizzatore di spettro è possibile visualizzarlo nel dominio della frequenza, nel quale più facilmente è possibile effettuare ad esempio valutazioni sulla sua banda e sulla sua potenza. Ciò avviene secondo la nota teoria di Fourier, secondo la quale un qualsiasi segnale periodico è il risultato della sovrapposizione di contributi sinusoidali che si differenziano tra di loro in ampiezza e/o fase. In tal senso quindi può essere utile conoscere il contenuto armonico di alcuni segnali su un certo intervallo di frequenze, oppure nell'ambito delle telecomunicazioni vedere se la portante di un segnale modulato interferisce con altri segnali e individuarne la banda occupata.

Esistono fondamentalmente due modi per fare misure nel dominio della frequenza e quindi, se si vuole, ci sono due diverse filosofie costruttive di un analizzatore: una si fonda sulla trasformata di Fourier mentre l'altra opera una scansione delle armoniche nella banda di interesse. Più dettagliatamente con la tecnica di Fourier si ha che il segnale viene campionato dopo di ciò i valori ottenuti sono opportunamente elaborati con algoritmi FFT (Fast Fourier Transform) e convertiti nel dominio della frequenza, quindi, infine, visualizzati sullo schermo dello strumento.

Tuttavia i più comuni analizzatori di spettro sono quelli "swept– tuned". La tecnica in tal senso più usata è quella del ricevitore supereterodina. Il termine eterodina significa infatti traslazione in frequenza, ed in effetti l'analizzatore opera una scansione dell'intervallo di frequenze d'interesse mostrandone le componenti presenti in una banda traslata rispetto a quella d'ingresso.

Per meglio capire come funziona l'analizzatore che ci accingiamo ad esaminare si riporta uno schema semplificato degli elementi costitutivi la cui analisi ci consentirà di capire meglio il funzionamento dello strumento oltre alle sue caratteristiche salienti.

I componenti principali sono:

- un dispositivo attenuatore d'ingresso RF;
- un filtro LPF;
- un mixer;
- un blocco di guadagno IF;
- un filtro IF, un rivelatore;
- un filtro video;
- un oscillatore locale;
- un generatore di rampa;
- il video di un CRT (Catode Ray Tube) sul quale infine apparirà il segnale in esame.

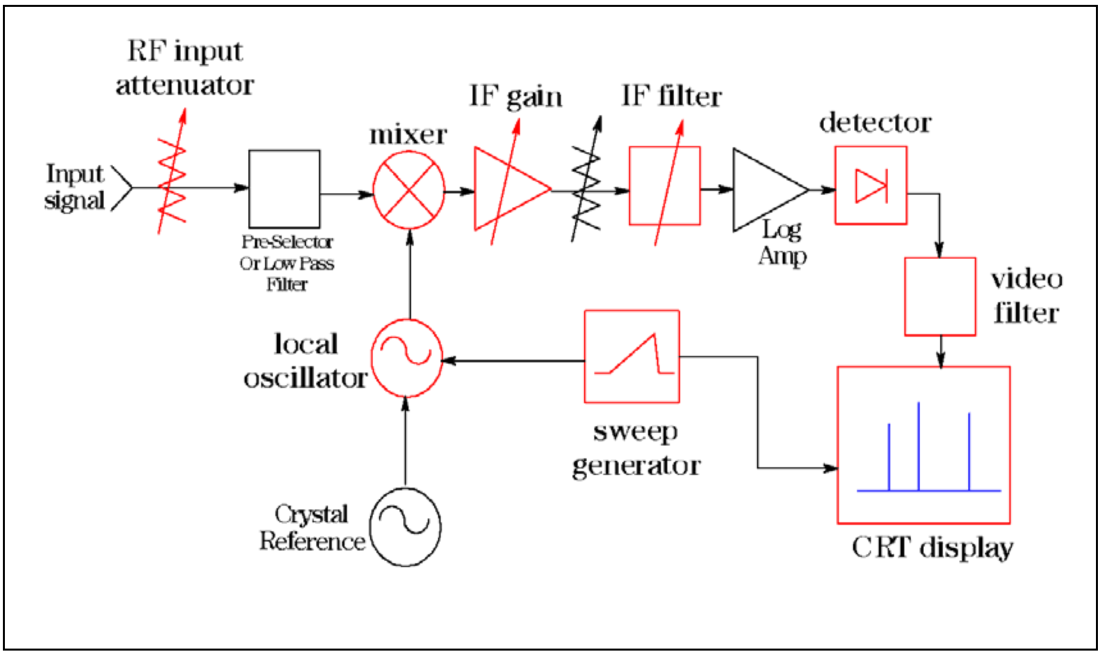


Figura 1 *– Schema a blocchi di un analizzatore di spettro "swept tuned"*

Dallo schema essenziale rappresentato in Figura 1 si osserva che il segnale in ingresso passa attraverso un filtro passa-basso (LPF) e quindi in un mixer che opera sull'ingresso con un segnale proveniente da un oscillatore locale. Il mixer è un dispositivo non lineare che come uscita restituisce, tra l'altro, i due segnali originari più la loro somma e la loro differenza. Tali segnali passano poi in un filtro a media frequenza (IF) dove sono opportunamente trattati, quindi un rivelatore d'inviluppo a diodo ne valuta essenzialmente la potenza e trasmette tale informazione alle placche di deflessione verticali del tubo a raggi catodici (CRT). Un generatore di segnale a rampa, infine, controlla il raggio del tubo catodico spostandolo orizzontalmente sullo schermo da sinistra verso destra ed allo stesso tempo sincronizza l'uscita dell'oscillatore locale in modo che la sua frequenza d'uscita cambi proporzionalmente alla rampa.

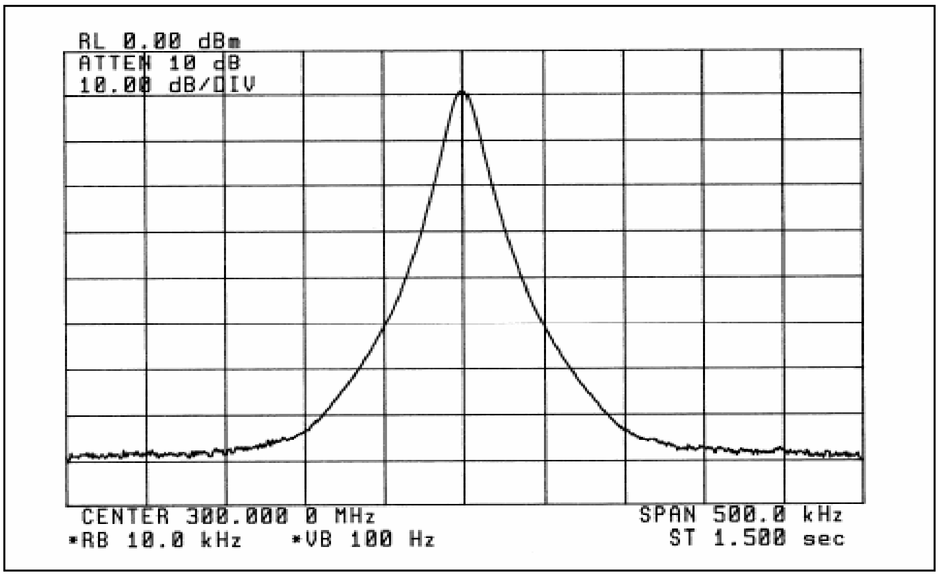


***Figura 2** – Tipico display con impostazioni*

La Figura 2 mostra il display di un tipico analizzatore di spettro controllato con microprocessore interno.

1.6.1 Descrizione e funzionamento

Descritto sommariamente l'andamento del segnale attraverso il dispositivo passiamo ad una analisi più approfondita dei singoli blocchi e di come operano affinchè risulti anche più chiara la comprensione dell'analizzatore di spettro ed il suo modo di operare.

Il filtro LPF in ingresso serve per tagliare le componenti indesiderate in alta frequenza del segnale d'ingresso o come si dice abitualmente serve per la reiezione delle cosiddette frequenze immagini indesiderate del segnale a radiofrequenza (RF) d'ingresso.

1.6.2 Il mixer

Il mixer è un dispositivo che trasla un segnale da una frequenza ad un'altra. Come mostrato in Figura 3 esso é costituito da due porte d'ingresso: in una va il segnale d'ingresso vero e proprio f_{sig} da convertire alle frequenze intermedie (IF) e nell'altra quello proveniente dall'oscillatore locale, f_{LO}, interno allo strumento. L'uscita è costituita oltre che dai due segnali f_{sig} e f_{LO}, dalla loro somma $f_{sig} + f_{LO}$, dalla loro differenza $f_{sig} - f_{LO}$ ed in generale da tutte le combinazioni di $| n*f_{sig} \pm m*f_{LO} |$ con n ed m interi.

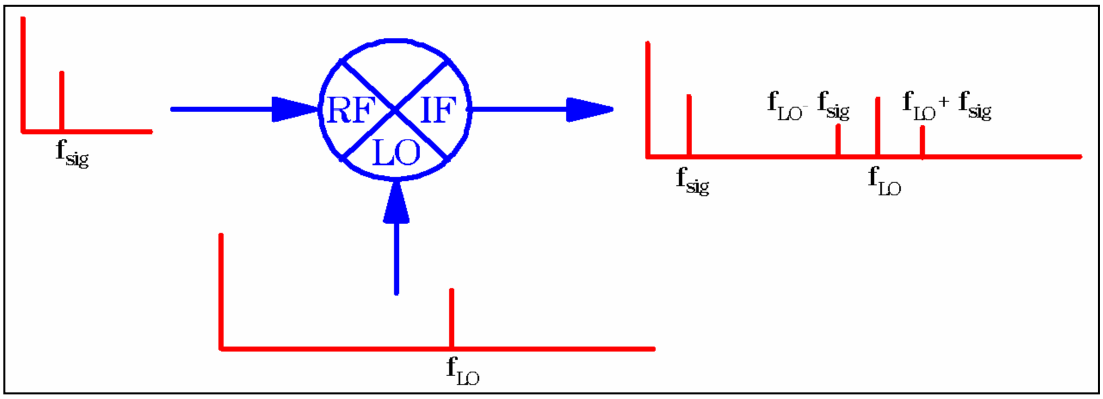


***Figura 3** – Mixer con ingressi ed uscite*

Tuttavia tra tutti questi segnali in uscita quelli con l'ampiezza maggiore sono, oltre a f_{sig} e f_{LO} , proprio quelli somma e differenza tra il segnale d'ingresso e quello interno dell'oscillatore locale. Tra questi ultimi due contributi in uscita quello che interessa ai fini dell'analisi è il segnale f_{LO} - f_{sig} , considerato ovviamente in valore positivo. In pratica ciò significa che si sposta il segnale d'ingresso a radiofrequenza (RF) ad una frequenza intermedia (IF) più opportuna, tipicamente 3.6 GHz (talvolta 3.9 GHz), ed a tale frequenza traslata l'ingresso sarà quindi filtrato, amplificato e trattato per essere infine visualizzato sullo schermo dell'analizzatore.

1.6.3 Il Filtro IF

Il filtro a frequenza intermedia rappresenta una parte fondamentale dell'analizzatore che ne determina in modo vincolante talune sue proprietà. E' un filtro passabanda che va a "finestrare" il segnale in uscita dal mixer entro una certa banda. Tale banda è, entro certi intervalli, regolabile dal pannello esterno dello strumento ed è definita come risoluzione della larghezza di banda (RBW). Esiste a tal proposito uno scambio tra la selettività in frequenza, che è praticamente la capacità del filtro di distinguere due armoniche contigue in frequenza e di ampiezza differente, il rapporto segnale-rumore e la velocità di misura dell'analizzatore stesso.

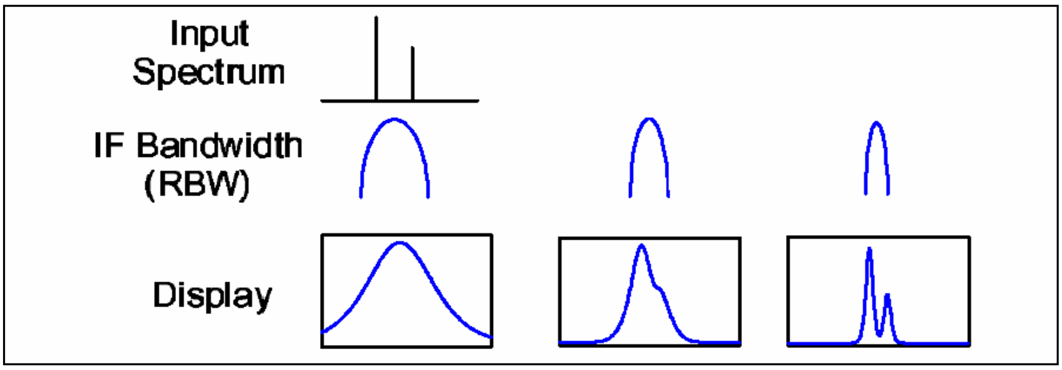


***Figura 4** – Effetti della risoluzione su un ingresso costituito da due segnali di differente ampiezza*

In altri termini più è stretta la banda del filtro a frequenza intermedia e migliore risulterà la selettività, così come rappresentato in Figura 4, ma aumentano proprio per questo motivo, ed anche sensibilmente, i tempi per la scansione dell'intervallo considerato.

Alcuni valori della larghezza di banda IF possono essere di qualche centinaio di Hz o per strumenti più raffinati una decina di Hz. In realtà quando si utilizzano filtri molto stretti diventa difficile riuscire a raggiungere una frequenza di 3.6 GHz. Tale difficoltà può essere risolta aggiungendo altri mixer, in numero variabile tra due e quattro, che consentono di traslare il segnale alla frequenza intermedia in più passi cosi come ad esempio illustrato successivamente in Figura 5, dove viene riportata l'architettura di un analizzatore di spettro Agilent 71100 che realizza l'equazione:

$$f_{sig} = f_{LO1} - (f_{LO2} + f_{LO3} + f_{LO4} + f_{final\ IF})$$

nella quale la quantità tra parentesi vale:

$$f_{LO2} + f_{LO3} + f_{LO4} + f_{final\ IF} = 3.3\ GHz + 300\ MHz + 18.4\ MHz + 3\ MHz = 3.6214\ GHz$$

in pratica lo stesso risultato che si otterrebbe usando solo il primo filtro IF.

Si noti per la precisione che nello schema esemplificativo sono omessi i blocchi di amplificazione.

Diversi analizzatori a radiofrequenza ammettono una frequenza generata dall'oscillatore locale tanto bassa da risultare inferiore a quella del primo blocco IF. Poiché non c'è una condizione di isolamento infinita tra l'oscillatore e la le porte IF del mixer accade che il segnale LO è presente all'uscita del mixer.

Quando il segnale LO uguaglia quello IF allora viene trattato come segnale utile dal sistema e appare sul video. Questo fenomeno è denominato "feed through" ed in effetti può essere usato come un indicatore di zero Hz (0 Hz marker).

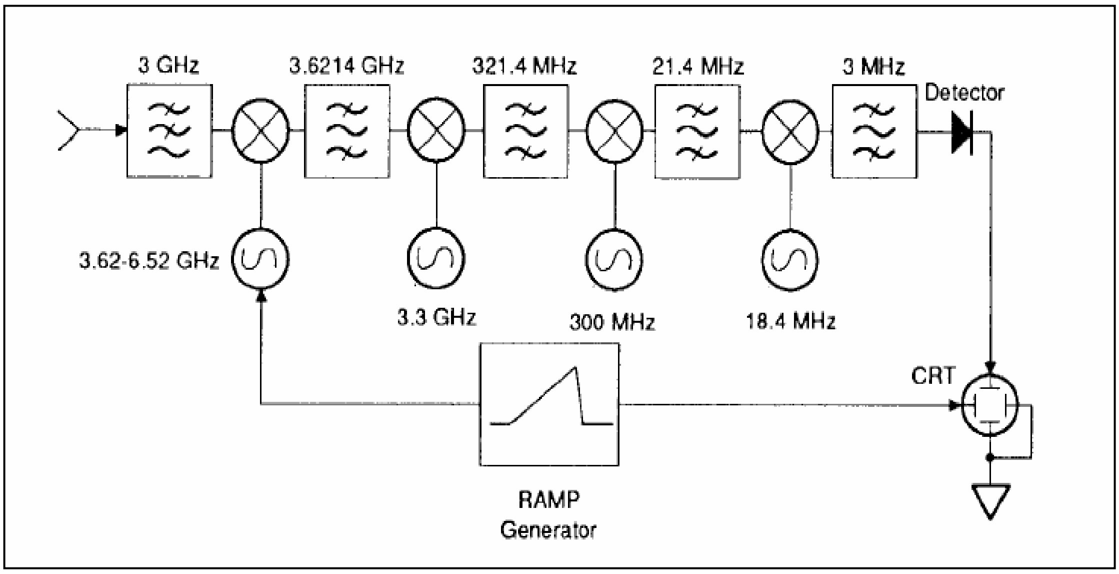


Figura 5 – *Uso di più blocchi mixer (mixing steps) per raggiungere una frequenza intermedia IF*

1.6.4 Rivelatore d'inviluppo e filtro video

Si passa adesso all'analisi del blocco successivo della catena: il rivelatore d'inviluppo a diodo. Talvolta è detto anche rivelatore di picco ed è un elemento circuitale che ha come uscita l'inviluppo del segnale d'ingresso. Nel modello supereterodina il segnale in uscita dal blocco IF costituisce l'ingresso mentre l'uscita è il segnale video. Nella sua forma più semplice esso è costituito da un diodo seguito da un parallelo RC.

E' possibile osservare sotto come praticamente opera il blocco rivelatore su un segnale in uscita dal filtro a media frequenza:

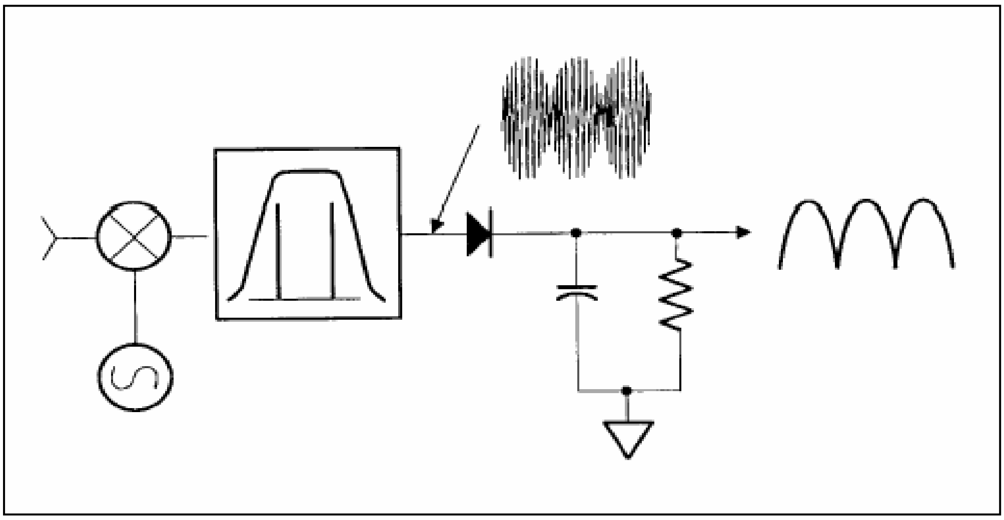


Figura 6 *– L'uscita del rivelatore d'inviluppo segue i picchi del segnale IF*

Il rivelatore d'inviluppo inoltre è un dispositivo che rende difatti l'analizzatore di spettro essenzialmente un voltmetro. La sua funzione è dunque quella di seguire le variazioni delle ampiezze dei picchi del segnale IF, non però nei suoi valori istantanei, tranne, come si vedrà poi, nel caso di modalità "zero span" dove esso diventa un demodulatore dell'ingresso visualizzandolo come segnale nel dominio del tempo.

Il blocco successivo che attraversa il segnale è il filtro video. E' un filtro passabasso che determina la banda dell'amplificatore video e praticamente la sua funzione è quella di "levigare" la traccia visualizzata sullo schermo così come indicato nelle figure 7 ed 8:

L'analizzatore di spettro elabora sia il segnale utile che l'inevitabile rumore e quanto più il segnale è prossimo al livello del rumore tanto più è difficile poterlo individuare in modo nitido. Modificando però la banda del filtro video (VBW) e rendendola minore della RBW si riesce a diminuire l'escursione picco–picco del rumore e quindi a levigarlo con l'effetto complessivo rappresentato sopra, rendendolo maggiormente distinguibile il segnale utile.

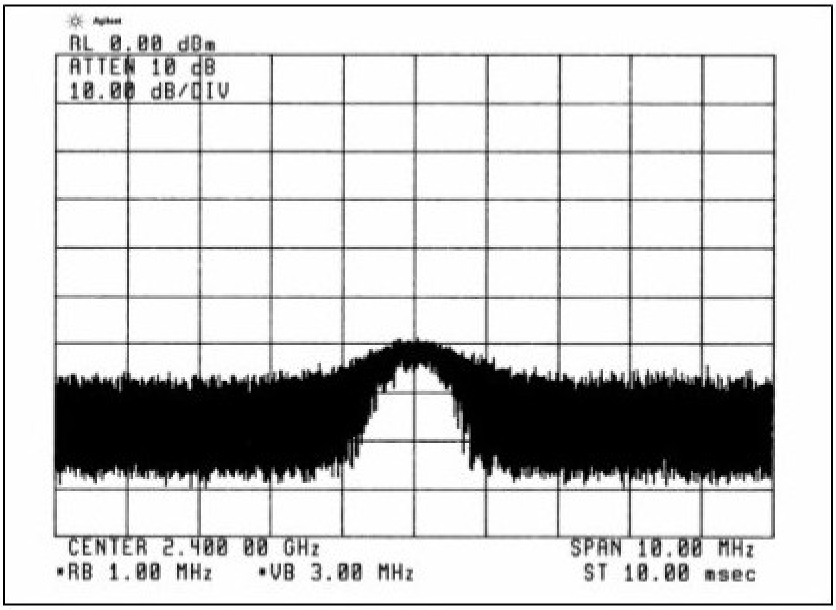


***Figura** 7 – Visualizzazione di un segnale con rumore*

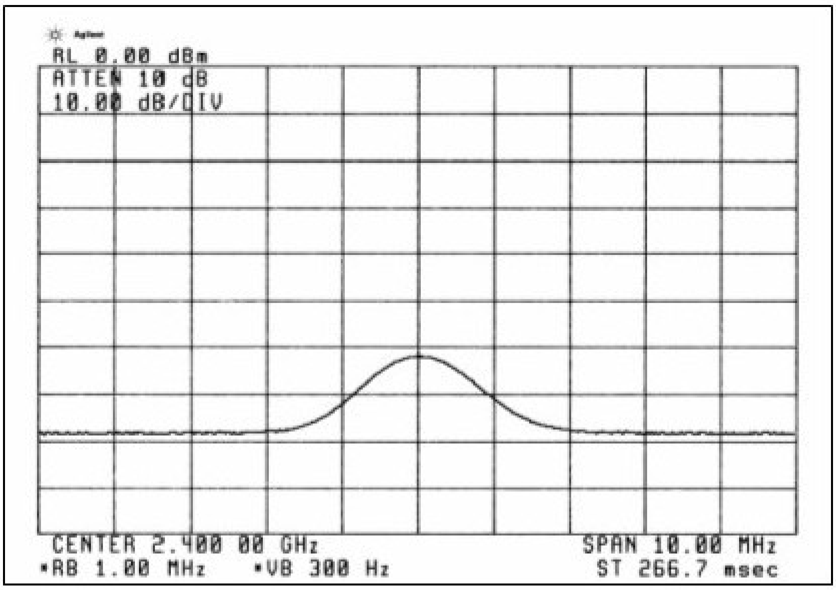
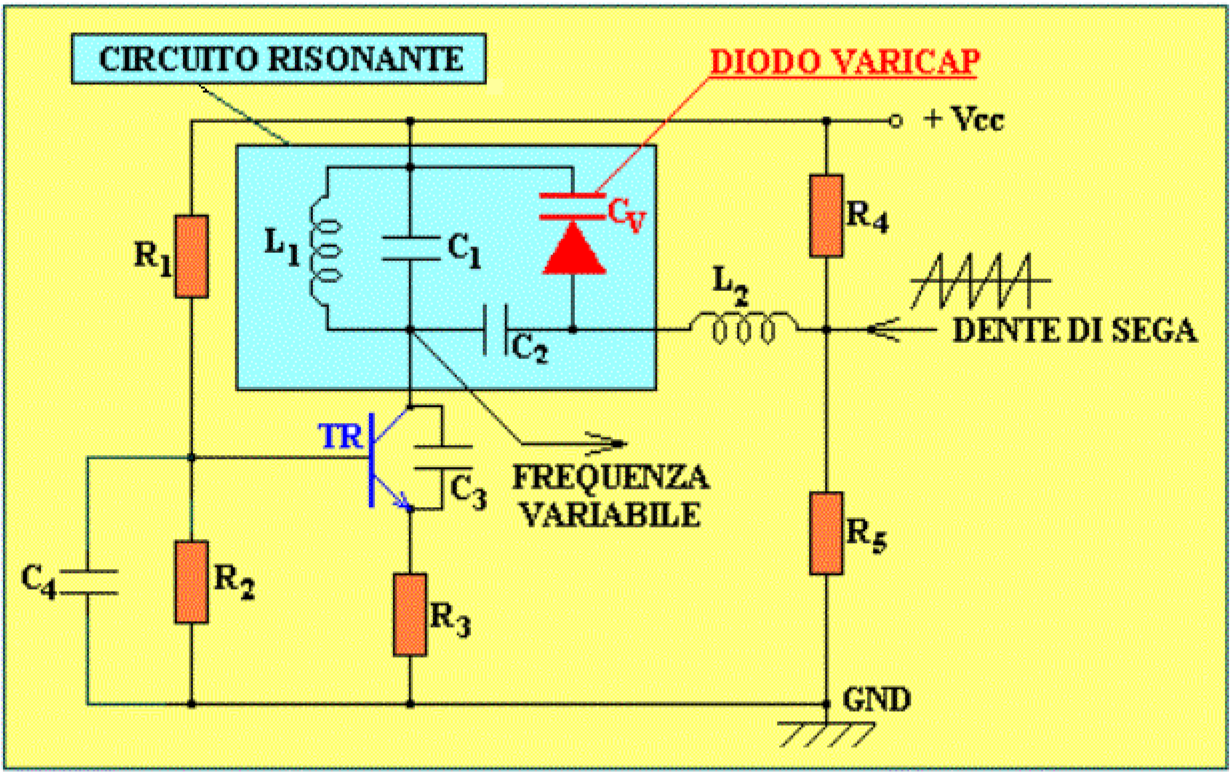


***Figura** 8 – Segnale dopo il "display*

Un ulteriore componente da considerare è l'oscillatore locale.

Esso è un oscillatore controllato in tensione (VCO) da un generatore di rampa (segnale a "dente di sega") che ne modifica la frequenza in modo proporzionale alla tensione di rampa.

Uno schema comunemente usato per realizzare l'oscillatore controllato in tensione **VCO** (**V**oltage **C**ontrolled **O**scillator), ed anche in altri campi, ad esempio come modulatore di frequenza, o anche all'interno del PLL, è quello seguente:



Il transistor **TR** connesso a base comune, per mezzo della capacità $\mathbf{C_4}$, è fatto oscillare dalla reazione positiva introdotta dal condensatore $\mathbf{C_3}$ connesso tra emettitore e collettore.

Il circuito risonante costituito da $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{C_1}$ determina la sua frequenza di risonanza in assenza del diodo varicap $\mathbf{C_V}$ secondo la formula:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}}$$

La presenza del diodo polarizzato inversamente ne modifica la frequenza secondo la formula:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot (C_1 + C_V)}}$$

In quanto il condensatore $\mathbf{C_1}$ si trova ad avere in parallelo, dinamicamente la capacità variabile $\mathbf{C_V}$ del diodo varicap.

Il partitore $\mathbf{R_4} – \mathbf{R_5}$ serve a polarizzare opportunamente in modo inverso il varicap.

L'induttanza L_2 serve a separare la radiofrequenza dell'oscillatore e ad impedirle di immettersi nel circuito del generatore a dente di sega.

Tale generatore contemporaneamente muove il raggio del tubo catodico orizzontalmente da sinistra verso destra determinandone l'andamento in frequenza lungo l'asse delle ascisse. In sostanza il generatore a dente di sega garantisce la sincronizzazione tra la scansione dell'asse orizzontale del video e la frequenza in uscita dall'oscillatore locale.

1.6.5 L'uscita video

L'uscita dell'analizzatore di spettro è una immagine su una griglia di assi X - Y presente sullo schermo del tubo a raggi catodici. Generalmente lo schermo è diviso in dieci intervalli orizzontali ed otto oppure dieci suddivisioni verticali. L'asse orizzontale è calibrato in frequenza che varia linearmente da sinistra verso destra. L'impostazione della frequenza dello strumento consiste di due passi: prima si fissa la frequenza centrale desiderata sulla griglia, poi si sceglie l'intervallo di frequenze (span) sulle dieci divisioni dell'asse orizzontale. E' interessante osservare che scegliendo uno span pari a zero con un tempo di scansione (sweep time, ST) non nullo l'analizzatore di spettro visualizza l'andamento del segnale nel dominio del tempo, in pratica "diventa" un' oscilloscopio.

L'asse verticale è calibrato in genere in ampiezza. Di solito un analizzatore consente la scelta di una scala lineare calibrata in volt oppure una scala logaritmica calibrata in *dB* ed altri anche una scala lineare in unità di potenza. La scala logaritmica è tuttavia la più utilizzata poiché permette di visualizzare un intervallo di grandezze maggiore rispetto a quella lineare. Le unità di misura standard sono in *dBm* (*dB* relativo ad 1 milliWatt), *dBmV* o *dBuV* (dB relativo al milliVolt o al microVolt rispettivamente). I moderni analizzatori sono solitamente dotati di opportuni microprocessori interni che consentono rapidamente il passaggio da una unità di misura all'altra.

1.6.6 Attenuatore RF e guadagno IF

Ritornando all'inizio dello schema vediamo cosa sono i blocchi tralasciati. L'attenuatore d'ingresso RF è posizionato tra il connettore che preleva il segnale esterno ed il mixer. La sua funzione è quella di regolare il livello del segnale incidente sul mixer per prevenire fenomeni indesiderati, come ad esempio la distorsione che potrebbe avvenire per ingressi troppo alti o a banda larga, e per regolare il range dinamico attraverso il controllo del grado di distorsione generata internamente.

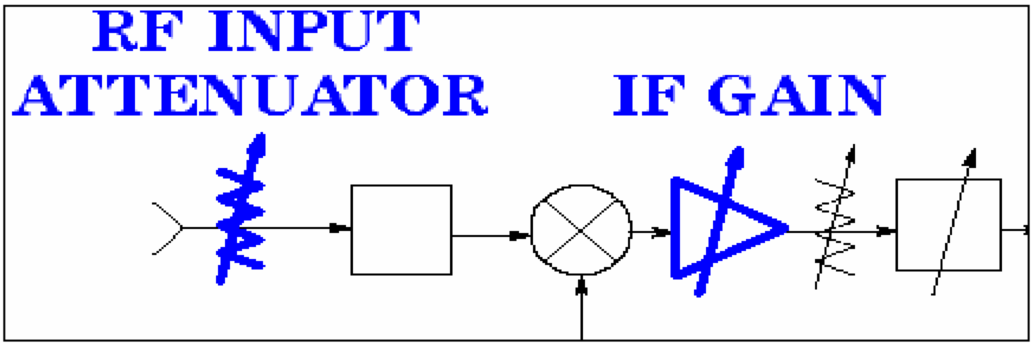


***Figura 9** – Blocco attenuatore RF e guadagno IF ad azione congiunta*

Il blocco IF ossia il guadagno a media frequenza, è posto prima del filtro IF. La sua funzione è quella di regolare la posizione verticale del segnale sullo schermo senza modificarne il suo livello cosi come è all'ingresso del mixer. In pratica si andrebbe a modificare il livello di riferimento. Dal momento che non vi vuole cambiare tale livello allora è implementato un legame funzionale tra l'attenuatore RF ed il guadagno IF: cioè il guadagno in modo automatico cambia e compensa l'eventuale attenuazione apportata all'ingresso in modo che il segnale sul video resti inalterato ed allo stesso modo il livello di riferimento.

1.6.7 Visione dell'insieme di funzionamento

Una visione d'insieme di come i vari componenti interagiscono insieme in un analizzatore si spettro con relativi valori numerici è data dalla rappresentazione seguente (Figura 10) dove chiaramente si vede il percorso di un input, rappresentato da un segnale con frequenza compresa tra 1 GHz e 2 GHz, e di come esso viene visualizzato sul video dello strumento.

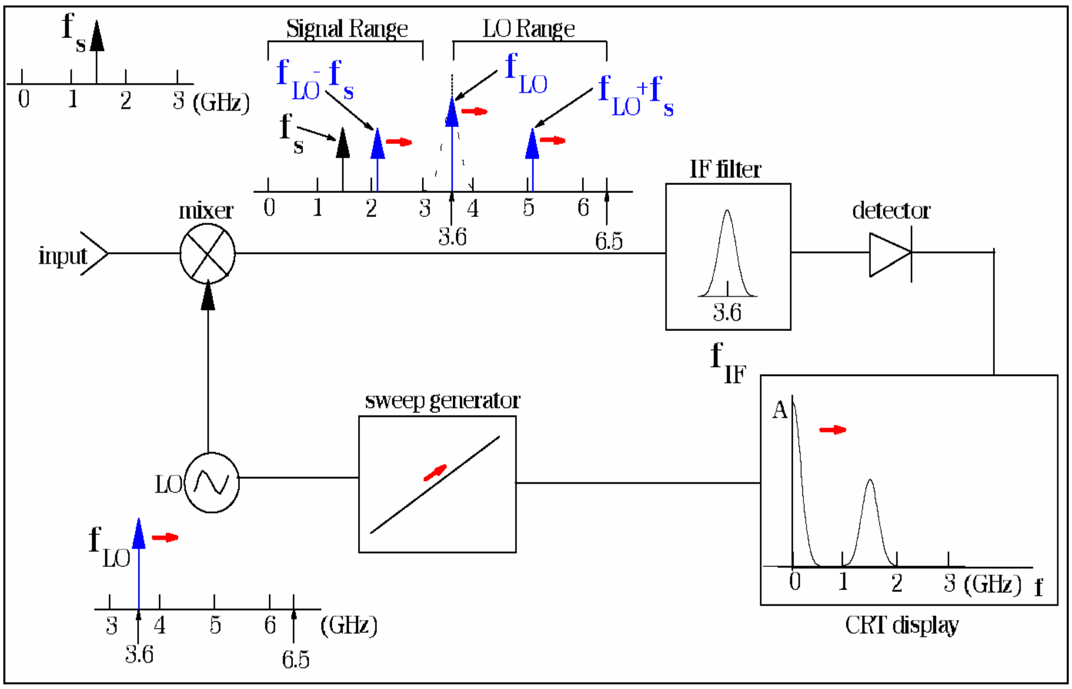


***Figura 10** – Schema di funzionamento dell'analizzatore di spettro con un ingresso f_S*

Con riferimento ai valori indicati si osserva la presenza di un segnale inaspettato a frequenza nulla che non esiste in ingresso! Come mai? Tale fenomeno è dovuto al fatto che il filtro IF preleva la frequenza dell'oscillatore locale a 3.6 GHz che entra esattamente nella sua banda come se in ingresso vi fosse un segnale a frequenza nulla. Tale contributo poi scompare e comincia ad entrarvi, aumentando f_{LO} , il contributo $f_{LO} - f_{sig}$.

1.6.8 Specifiche principali di un analizzatore

La conoscenza delle prestazioni di un qualsiasi strumento, e dunque anche di un analizzatore, passa attraverso la conoscenza delle sue caratteristiche date dai manuali e fogli tecnici (datasheet) o in altri termini la conoscenza delle capacità e/o dei limiti di uno strumento si evincono dalle sue specifiche. Per scegliere lo strumento adatto ad effettuare una generica misura occorre definire alcuni parametri fondamentali ovvero bisogna porsi alcune semplici domande essenziali quali:

1. quale è l'intervallo di frequenza a cui si vuole operare? (→ range di frequenza);
2. quale è l'intervallo d'ampiezza consentito? (→ ingresso massimo e sensibilità);
3. fino a che livello è possibile misurare la differenza tra due segnali riferendo ci sia all'ampiezza (→ range dinamico) che alla frequenza? (→ risoluzione);
4. quanto accurate sono le misure effettuate? (→ accuratezza).

Partendo da tali quesiti focalizziamo l'attenzione sulle principali specifiche dell'analizzatore e su come esse intervengono nelle valutazioni delle caratteristiche del segnale da esaminare.

La scelta dell'intervallo di frequenza a cui si lavorerà è prioritaria poiché si vuole che l'analizzatore copra le frequenze fondamentali dell'applicazione che si sta studiando senza tralasciare contributi armonici rilevanti ai fini dell'analisi che si sta svolgendo ed allo stesso tempo escludendo le frequenze che non influenzano i fenomeni sotto osservazione.

1.6.9 Risoluzione

La risoluzione è una specifica che interviene quando si vogliono ad esempio misurare segnali contigui e si vuole distinguerli, o meglio rappresenta la capacità dello strumento di separare due segnali sinusoidali in due distinte risposte. Ciò è legato alla larghezza di banda ed alla forma del filtro IF ovvero alla risoluzione di banda (RBW). Il filtro IF dunque determina la capacità dell'analizzatore di distinguere o meno due segnali adiacenti in frequenza. Di solito la banda del filtro IF è specificata a 3 dB o anche talvolta a 6 dB. Quando si vogliono misurare due segnali di uguale ampiezza e contigui si seleziona opportunamente la RBW fino a che si riesce a visualizzarli separatamente. Per esempio se due segnali sono distanti in frequenza 10 kHz allora con una RBW di 10 kHz si riesce a separarli. In generale si può affermare che due segnali contigui in frequenza e di pari ampiezza possono essere distinti se la loro distanza in frequenza è maggiore o uguale alla larghezza di banda a 3 dB del filtro a media frequenza.

1.6.10 Selettività

La selettività è una proprietà che interviene nell'analisi di segnali di diversa ampiezza. Essa è definita come il rapporto tra larghezza di banda a 60 dB e larghezza a 3 dB del filtro IF così come illustrato nella figura 11 sottostante:

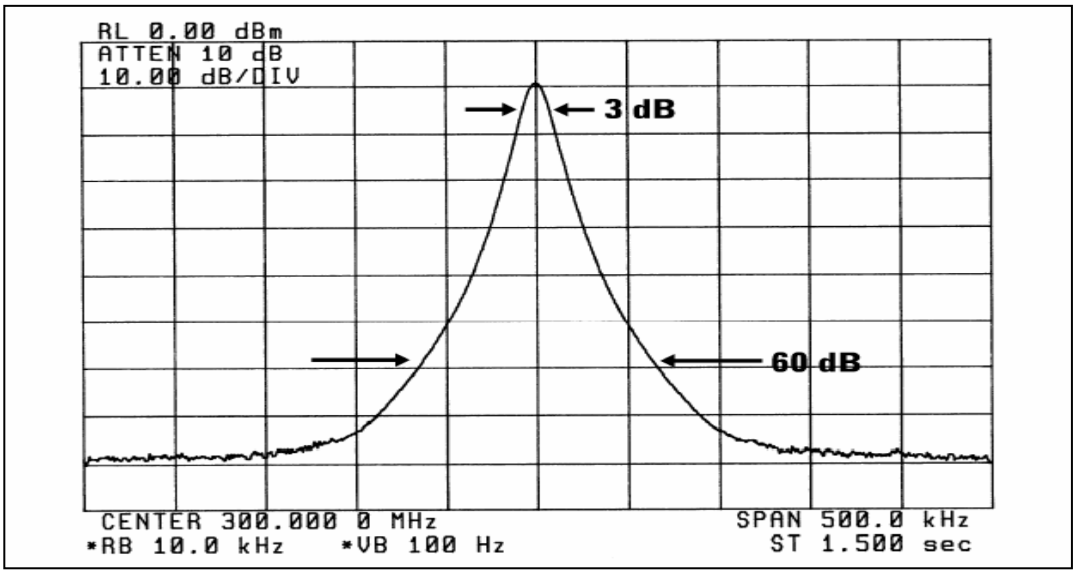


Figura 11 *– Definizione di selettività: rapporto tra la larghezza di banda a 60 dB e a 3 dB*

Valori tipici di selettività sono compresi nell'intervallo 11:1 → 15:1 per quanto riguarda i filtri analogici mentre vale circa 5:1 per i filtri digitali. Tale parametro è ovviamente una quantità sempre maggiore dell'unità e risulta tanto migliore quanto più è piccola in quanto questo fatto si traduce nell'avere una forma del filtro più stretta alla base.

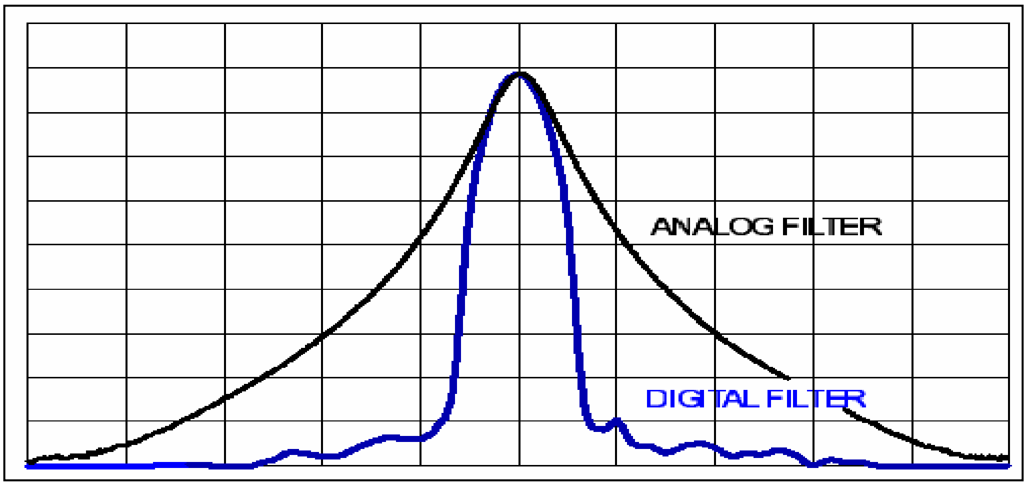


***Figura 12** – La migliore selettività dei filtri digitali rispetto agli analogici*

In altri termini operare con un filtro molto selettivo vuol dire avere maggiore capacità di poter individuare segnali vicini e con diversa ampiezza, cosa altrimenti non possibile se il filtro avesse una forma tale da allargarsi eccessivamente alla base coprendo eventualmente il segnale di ampiezza minore e difatti non rilevandolo. La forma e natura del filtro IF dunque determina la RBW.

1.6.11 Fattori che limitano la RBW

Un elemento importante che influenza il limite inferiore della RBW è la stabilità in frequenza dell'oscillatore locale interno all'analizzatore. Tutti gli oscillatori infatti in misura diversa sono modulati in frequenza o fase dal rumore aleatorio. Gli oscillatori utilizzati di solito in un analizzatore sono oscillatori YIG con un range tra 2 GHz e 7 GHz e con una deriva che può avere l'entità di 1 kHz od anche più. Questo fenomeno di instabilità dell'oscillatore è anche conosciuto come FM residua. Se la RBW risulta inferiore alla distanza picco - picco di tale oscillazione allora succede che il segnale viene degradato e contributi che risultassero interni all'FM residua non potrebbero essere individuati. Questo dunque significa che l'FM residua dell'analizzatore determina la minima risoluzione di banda consentita, traducibile con la minima spaziatura in frequenza ottenibile per la separazione di due toni di uguale ampiezza. Gli effetti della FM residua non risultano molto visibili per una risoluzione piuttosto grande. Man mano però che si riduce la larghezza della banda del filtro IF allora tale disturbo diventa considerevolmente più evidente. Una ulteriore contributo di rumore riconducibile alla instabilità dell'oscillatore locale è costituito dal rumore delle bande laterali del segnale, noto anche come rumore di fase (*phase noise*).

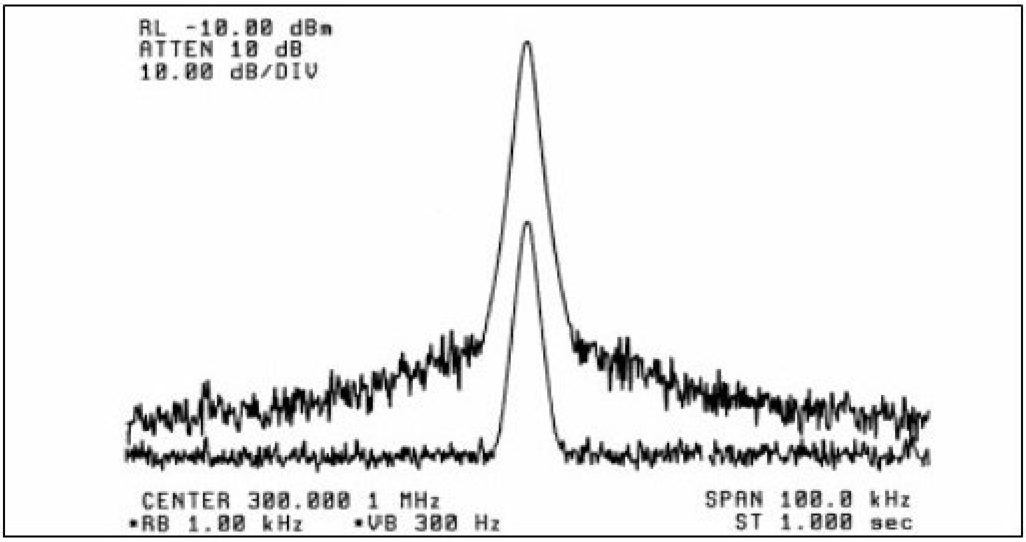


Figura 13 – *L'effetto del "phase noise" è visibile quando il segnale è sufficientemente al di sopra del livello del rumore di base del sistema*

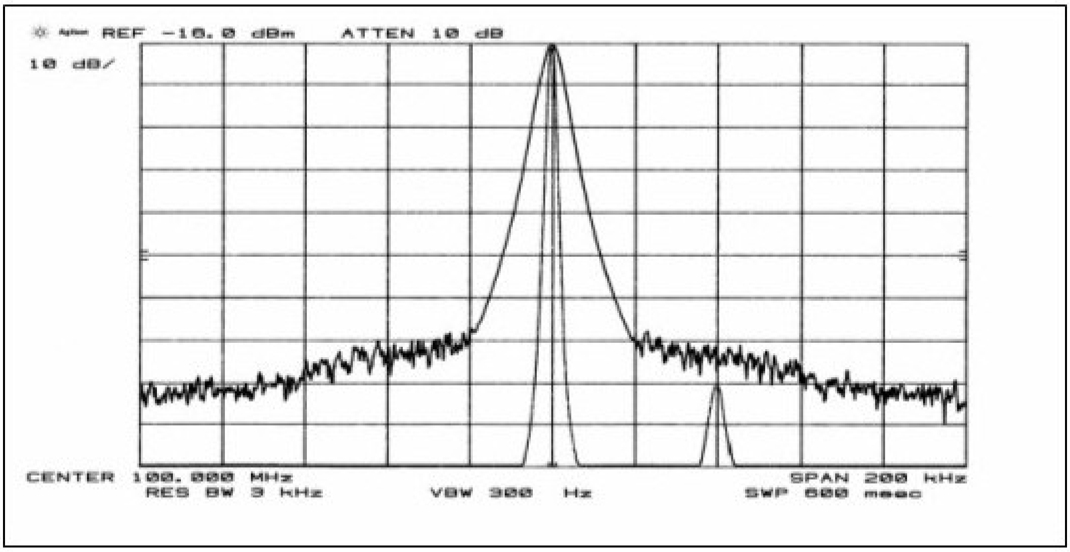


***Figura 14** – Il rumore di fase può impedire la risoluzione di segnali di diversa ampiezza*

La presenza di tale rumore ad esempio può mascherare un segnale prossimo alla portante o segnali di piccola ampiezza o comunque in generale può impedire la risoluzione di segnali di differente ampiezza anche se questi fossero comunque separabili con una opportuna RBW. In generale riducendo la RBW il livello del rumore di fase diminuisce.

1.6.12 "Trade-off" tra risoluzione e tempo di misura

Quando si riduce la RBW, come già detto, si migliora la risoluzione ma il prezzo da pagare in termini di prestazione è un aumento del tempo di scansione dell'asse delle frequenze. C'è uno scambio inverso: più si diminuisce la banda del filtro IF e più aumentano i tempi della misura.

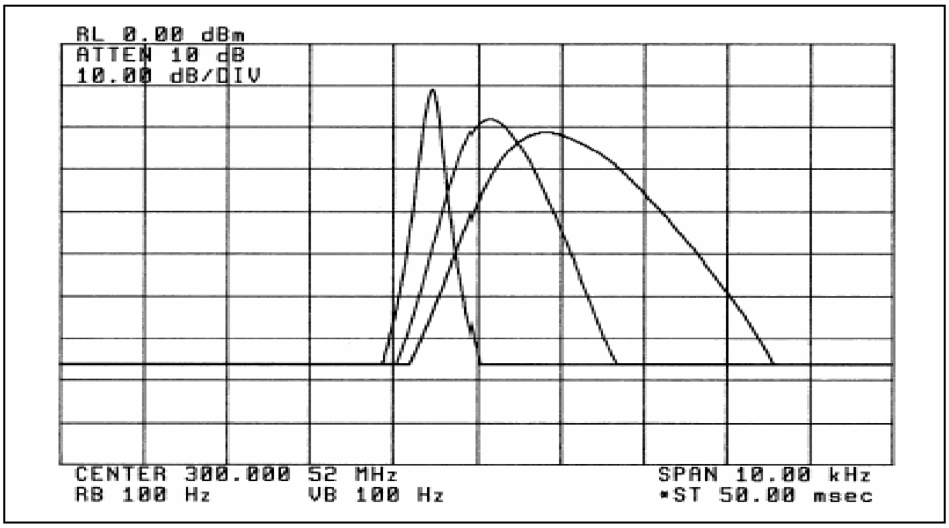


Figura 15 *– Una scansione troppo veloce abbassa e trasla il segnale*

Ciò perché il filtro è un circuito a banda limitata che richiede inevitabili tempi di carica e scarica.

In modo più preciso si può affermare che il tempo di salita del filtro è inversamente proporzionale alla sua larghezza di banda tramite una specifica costante k, cioè esiste la relazione seguente:

Tempo di Salita = k / (RBW).

D'altro canto se il tempo di scansione (sweep time, ST) fosse troppo piccolo il filtro non riuscirebbe a rispondere in tempo e ciò si manifesterebbe con una risposta sul video non calibrata sia per quanto concerne l'ampiezza, che risulterebbe inferiore e dunque abbassata, sia per quanto concerne la frequenza che apparirebbe traslata in avanti in frequenza così come si vede nella Figura 15. Anche questa grandezza è possibile relazionarla con la RBW e lo SPAN attraverso una relazione di proporzionalità che ben evidenzia la "drammaticità" degli effetti sul tempo di misura alla riduzione della banda IF : ST = k (SPAN) / (RBW)2 ! In realtà molti analizzatori hanno un controllo su tale fenomeno scegliendo in modo automatico il più veloce tempo di scansione possibile una volta selezionati la RBW, lo SPAN e la VBW (poi vedremo successivamente cosa rappresentano queste ultime due specifiche) così come messaggi d'avviso appaiono quando ad esempio si vuole impostare un tempo di misura inferiore al minimo consentito.

1.6.13 Sensibilità

Uno dei possibili usi di un analizzatore di spettro è la ricerca e misura di piccoli segnali. Cosi come per un qualsiasi altro strumento anche qui la sensibilità rappresenta la capacità dello strumento di misurare segnali piccoli. Più esattamente in un analizzatore di spettro essa rappresenta il livello della più piccola sinusoide che può essere osservata sotto le migliori condizioni di minima risoluzione, cioè 0 dB d'attenuazione sull'ingresso e con minima banda video. La sensibilità è limitata dalla presenta del rumore termico, presente in ogni dispositivo elettronico, e dovuto essenzialmente al moto di agitazione termica degli elettroni e rappresentato dalla quantità kTB, dove k è la costante di Boltzman, T è la temperatura assoluta e B è la larghezza di banda. L'analizzatore di spettro caratterizza tale rumore con una opportuna grandezza rappresentante il livello di rumore medio visualizzato (DANL) ed espresso in *dBm* riferito alla più piccola RBW possibile. Tale parametro è indicativo della migliore sensibilità possibile di un analizzatore, infatti un segnale d'ingresso che fosse al di sotto del livello di rumore non sarebbe individuabile. Generalmente la sensibilità di un analizzatore di spettro è compresa in un intervallo che varia all'incirca da $-90\ dBm$ a $-145\ dBm$.

Un aspetto ulteriore che interviene sulla qualità del segnale sotto test interessa ancora l'attenuatore a radiofrequenze posto all'inizio della catena d'ingresso. La sua funzione è quella in pratica di regolare il livello del segnale in ingresso e non ha effetto sul livello di rumore interno poiché quest'ultimo è generato dopo il mixer. Tuttavia l'attenuatore RF regola il livello del segnale in ingresso quindi influisce complessivamente il rapporto segnale – rumore SNR. Dunque si può in tal senso affermare che il migliore SNR ottenibile a parità di ogni altra condizione è quello relativo alla minore attenuazione RF possibile. Ritorna ancora il solito discorso di trade-off: se aumenta l'attenuazione RF diminuisce la SNR. Ricordiamo infine che, tenendo presente lo schema iniziale, l'attenuatore RF ed il blocco di guadagno IF posizionato a valle del filtro sono legati tra loro. Per quanto detto finora vuol dire che se ad esempio si da una attenuazione d'ingresso di 10 dB e contemporaneamente aumento il guadagno IF di 10 dB per compensare la precedente attenuazione si ottiene sullo schermo un livello del segnale utile invariato ma un aumento del livello del rumore di 10 dB! E' quest'ultima quindi una operazione che richiede un opportuna cautela.

Il rumore termico generato all'interno dell'analizzatore di spettro presenta una densità spettrale di potenza praticamente costante su tutte le frequenze. In altri termini ciò vuol dire che il rumore non si "addensa" su intervalli di frequenza preferenziali ma resta sempre lo stesso. Questo fatto comporta che il rumore complessivo che raggiunge il rivelatore a diodo dipende solo dalla larghezza di banda del filtro IF ovvero dalla RBW. Se si aumenta la RBW allora aumenta anche il livello di rumore DANL poiché ne passa di più attraverso una banda più larga.

1.6.14 Filtro video

Accenniamo ora alla larghezza della banda video (VBW). Il filtro video può essere adoperato per appiattire il rumore visualizzato per una più facile identificazione di segnali piccoli.

E' in sostanza un filtro passabasso che segue il rivelatore e guida l'andamento del segnale sul video. Riducendo la frequenza di taglio del filtro video fino a che diventi minore o uguale di quella del filtro IF si ha che il sistema video non riesce più a seguire le rapide variazioni del segnale che passa attraverso i blocchi IF col risultato che si ottiene un effetto finale di media e di omogeneizzazione. Anche il filtro video ha un proprio tempo di risposta la cui equazione vale ST = k (Span) / [(RBW)(VBW)] quando la banda video è minore o uguale alla risoluzione. Tale proprietà tuttavia non modifica la risoluzione dell'analizzatore, cioè cambiando la VBW non si migliora la sensibilità che resta invariata. Quello che si va a modificare è in effetti per così dire il grado di "discernibilità" del segnale utile rispetto ai vari contributi di rumore presente sullo schermo.

1.6.15 "Video Average"

Gli analizzatori con display digitali sono spesso dotati anche di una ulteriore opzione, ossia la possibilità di mediare il segnale video (video averaging). Un display è digitale se, sostanzialmente, opera tramite una modalità di rappresentazione del segnale che utilizza un numero finito di suoi punti memorizzati in apposite memorie precedentemente alla visualizzazione stessa. Il video averaging è compiuto su punti campionati dal segnale in due o più passi secondo l'algoritmo seguente:

$$A_{avg} = [(n-1)/n]*A_{prior\ avg} + (1/n)*A_n$$

dove A_{avg} è il nuovo valore medio desiderato, $A_{prior\ avg}$ è il valore precedentemente mediato, A_n è il valore calcolato corrente ed n rappresenta il numero dalla scansione corrente. La n è scelta dall'utente con un comando sullo strumento. Con questa procedura e per passi successivi si converge ad un valore mediato così come indicato nell'illustrazione 16 seguente che mostra tale effetto con 1, 5, 20 e 100 "spazzolate" successive sul segnale originario. La differenza tra il video filtering ed il video averaging è che il primo è una operazione in tempo reale, cioè è effettuata al procedere della traccia video, mentre la seconda richiede più scansioni successive della stessa traccia.

Tale differenza risulta importante nel caso in cui il segnale da studiare ad esempio dovesse cambiare nel tempo.

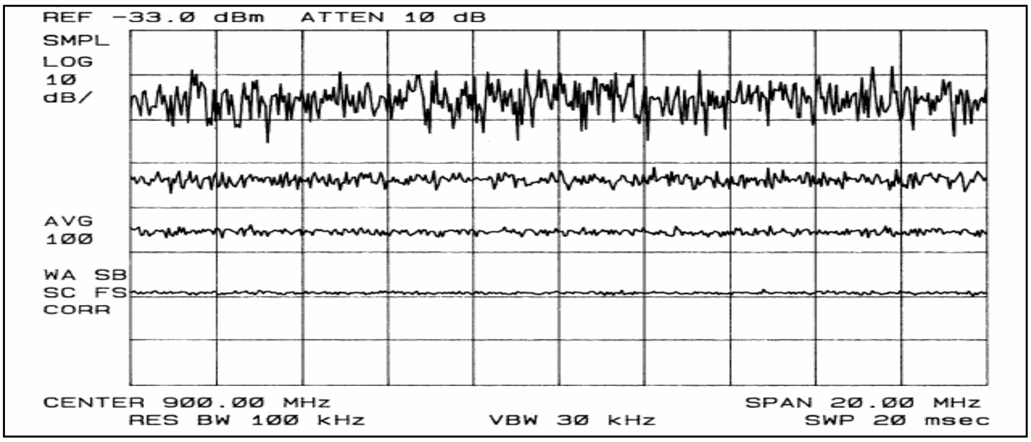


***Figura 16** – Effetto del video averaging per 1,5,20 e 100 "spazzolate"*

Concludendo il discorso fatto finora si può affermare che per ottenere la maggiore sensibilità possibile occorre che:

1. la RBW sia la minore possibile;
2. l'attenuazione RF d'ingresso sia la minore possibile;
3. ci sia un uso opportuno della banda del filtro video VBW (tipicamente VBW < 0.01 RBW).

Notiamo ancora che le condizioni qui sopra consigliate determinano anche qualche effetto indesiderato. Ad esempio, come già visto, si ha un considerevole aumento dei tempi di misura per una RBW molto piccola cosi come una attenuazione d'ingresso troppo bassa porta ad una diminuzione dell'accuratezza della misura.

1.7 Analizzatori di spettro numerici

Lo strumento comunemente utilizzato per effettuare l'analisi in frequenza è l'analizzatore di spettro FFT che è in grado di effettuare i calcoli numerici necessari per eseguire la trasformata di Fourier a partire da un segnale temporale discretizzato.

Sebbene i calcoli richiesti siano la ripetizione di semplici operazioni matematiche, qualora aumenti il numero di dati sui quali si deve operare la pesantezza computazionale diviene elevata. Nel 1965 due ricercatori (Cooley e Tuckey) ridussero drasticamente il numero di operazioni matematiche richieste per eseguire la trasformata di Fourier attraverso lo sviluppo di algoritmo che oggi passa sotto il nome di Fast Fourier Transform (FFT).

Per renderci conto di quale sia l'ammontare del risparmio di operazioni tra la trasformata "classica" e quella "veloce" assumiamo che segnale temporale in osservazione sia comporto da N campioni. Utilizzando il metodo convenzionale il numero di operazioni matematiche da effettuare è pari a N^2, usando l'algoritmo FFT il costo computazionale è ridotto a $(N/2)*\log_2 N$. Ciò non costituisce una grande differenza per N piccolo, ma non appena N cresce tale differenza diviene molto significativa come visibile nella seguente tabella:

N	N^2	(N/2)log2(N)
32	1024	80
128	16384	448
1024	1048576	5120

La tecnica FFT quindi è stata una innovazione tecnologica particolarmente significativa ed è inutile affermare che essa abbia acquistato popolarità in una vasta serie di applicazioni.

L'analizzatore FFT presenta alcuni vantaggi rispetto agli analizzatori di tipo analogico tra cui:

- L'utilizzo di memoria digitale, caratteristica fondamentale della tecnica FFT, permette all'analizzatore di sostituire strumenti come oscilloscopi o registratori di forme d'onda.
- Una elevata risoluzione in frequenza e la possibilità di ottenere molte più linee spettrali dal medesimo segnale di quanto non si possa ottenere con tecniche analogiche e tutto ciò in un periodo di tempo molto più piccolo.
- La possibilità di ottenere precisamente, utilizzando un analizzatore multi canale, le relazioni in modulo e fase fra ingressi ed uscite.

Cominciamo ad introdurre i concetti fondamentali dell'FFT ed in particolare consideriamo alcune caratteristiche che sono importanti per capire l'analisi spettrale di un analizzatore basato sull'FFT.

1.7.1 Principi fondamentali dell'FFT

Un analizzatore numerico basa il suo principio di funzionamento sulla nota Trasformata di Fourier Discreta (DFT).

Per capire meglio le caratteristiche e le limitazioni di un analizzatore FFT per l'analisi spettrale è importante conoscere alcune proprietà della DFT e gli effetti del campionamento.

Si parte dal segnale analogico in ingresso *x(t)* il quale viene campionato e convertito in forma numerica, dando origine ad una sequenza finita *N* di campioni. Tale sequenza, ossia il segnale tempo-discreto *x(nT)* viene poi elaborato applicando la nota relazione che caratterizza le DFT:

$$X(kF) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi kFnt} \qquad \boldsymbol{k=0,1,\ldots,N-1}$$

dove:

N = numero dei campioni

F = l'intervallo dei campioni nel dominio della frequenza

T = periodo di campionamento nel dominio del tempo

Questa espressione fornisce una versione campionata dello spettro del segnale, ossia restituisce i valori, in termini di modulo e fase che lo spettro assume in corrispondenza di determinate frequenze equispaziate. Ovvero, la DFT di una sequenza di durata finita può essere interpretata come campionamento in frequenza dello spettro della sequenza.
La possibilità di calcolare la DFT del segnale *x(nT)* deriva dall'esistenza di un particolare algoritmo, noto come FFT (Fast Fourier Transform), che consente di calcolare la suddetta trasformata in modo estremamente efficiente, in particolare quando il numero N di campioni è una potenza di base 2; ad esempio, sono molte diffuse le FFT a 1024 punti, cioè il calcolo dello spettro di *x(t)* in 1024 frequenze distinte.

L'intervallo dei campioni nel dominio della frequenza (o *bins*) della DFT è data dalla seguente relazione:

$$F = \frac{1}{NT} = \frac{F_s}{N}$$

dove:

F_s = frequenza di campionamento

Quindi da questa formula si può già notare che la risoluzione in frequenza può essere migliorata o aumentando il numero dei campioni N o diminuendo la frequenza di campionamento Fs.

Il modulo della DFT è una funzione simmetrica di circa N/2 mentre la fase è una funzione simmetrica dispari.

L'analizzatore numerico evidenzia solamente la prima metà dei punti N della FFT.

La frequenza di un particolare punto FFT, k, è data da:

$$F_k = \frac{kF_s}{N}$$

La massima frequenza evidenziata è $F_k=F_s/2$, dove $k=N/2$

La DFT è una funzione esponenziale complessa dalla quale l'analizzatore di spettro calcola sia il modulo in *dBm* e sia la fase in gradi.

Ricordiamo che la conversione in *dBm* è data da:

$$P_{(dBm)} = 20log(V_{RMS} / V_{REF})$$

dove

$$V_{REF} = \sqrt{0.001\ watts * 50\ \Omega} = 0.2236\ volts$$

è la tensione di riferimento definita come la tensione che produce 1 milliwatt di potenza su di una resistenza a 50 Ω.

1.7.2 Effetti del campionamento

La trasformata di Fourier di un segnale analogico $x_a(t)$, è definita come:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

Per ottenere una rappresentazione digitale $x(n)$ di un segnale analogico $x_a(t)$, un analizzatore numerico campiona il segnale ad un intervallo uniforme T:

$$x(n) = x_a(t) \,\Big|_{t=nT}$$

e si presume che la campionatura sia ideale tale da non sussistere tensioni di quantizzazione o altre distorsioni.

La trasformata di Fourier di questa sequenza a tempo discreto ideale è:

$$X(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[\frac{1}{T}(FT + k)\right]$$

questa equazione mostra la relazione tra la trasformata di Fourier $X_a(F)$ del segnale continuo, e la trasformata di Fourier $X(F)$ della sequenza discreta nel tempo.

$X(F)$ è la somma di un numero infinito di $X_a(F)$ opportunamente traslate in frequenza.

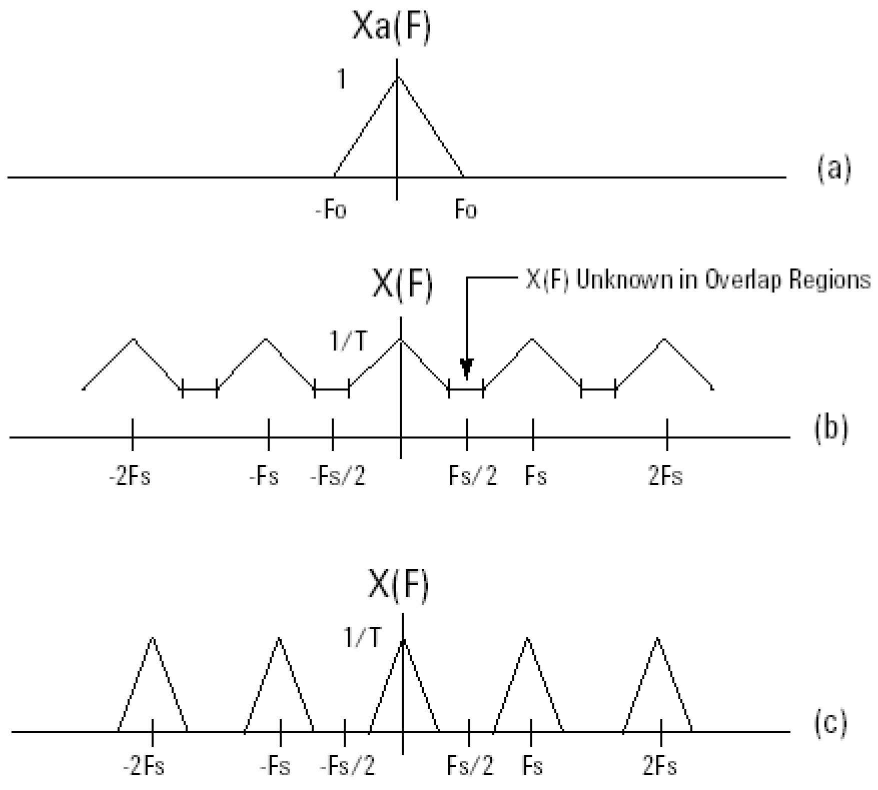


Figure 1. Fourier transform of (a) continuous signal, (b) discrete-time signal with overlap, and (c) discrete-time signal without overlap

La Figura 1a) mostra la trasformata di Fourier $X_a(F)$ di un segnale continuo. La Figura 1b) e 1c) mostra la trasformata di Fourier $X(F)$ di due segnali tempo-discreti ottenuti da un diverso periodo di campionamento.

Si vede che affinché la successione dei campioni conservi le informazioni del segnale originario (condizione indispensabile per poter risalire allo spettro dai dati campionati) il valore massimo di T deve rispettare il primo vincolo stabilito dal teorema del campionamento o condizione di Nyquist:

$$F_s = 1/T > 2B \Rightarrow T < 1/(2B)$$

dove B è la banda del segnale sotto analisi.

La figura 1b) rappresenta lo spettro del segnale campionato nel caso che le repliche di $X_a(f)$ si sovrappongono (sottocampionamento), essendo non soddisfatta la condizione di Nyquist, tale fenomeno è chiamato *aliasing*, la Figura 1c) invece si riferisce al caso in cui tale condizione sia soddisfatta con un certo margine e che le repliche di $X_a(f)$ non si sovrappongono (sovracampionamento).

Una scelta errata della frequenza di campionamento del segnale, quindi può essere causa del verificarsi del fenomeno dell'aliasing, che consiste nella comparsa di segnali "fantasma" sul display.

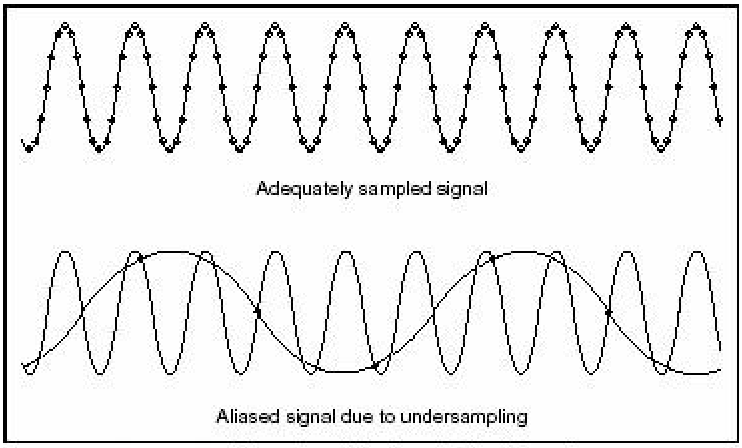
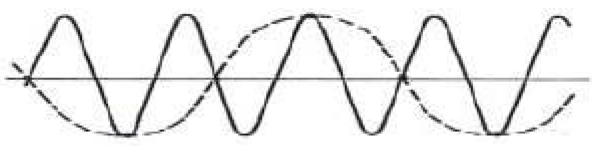


Figura 2 Adequate and Inadequate Signal Sampling



aliasing rappresentato nel dominio del tempo: la curva tratteggiata rappresenta il segnale a bassa frequenza che nasce ma che non fa parte del segnale originale

Ad esempio, una componente a frequenza

$$\frac{F_s}{2} < f_0 < F_s$$

dove F_s è la frequenza di campionamento appare come frequenza $F_s - f_o$

Nella Figura seguente sono mostrate le frequenze "fantasma" che appaiono quando il segnale con le componenti a 25, 70, 160 e 510 Hz è campionato a 100 Hz.

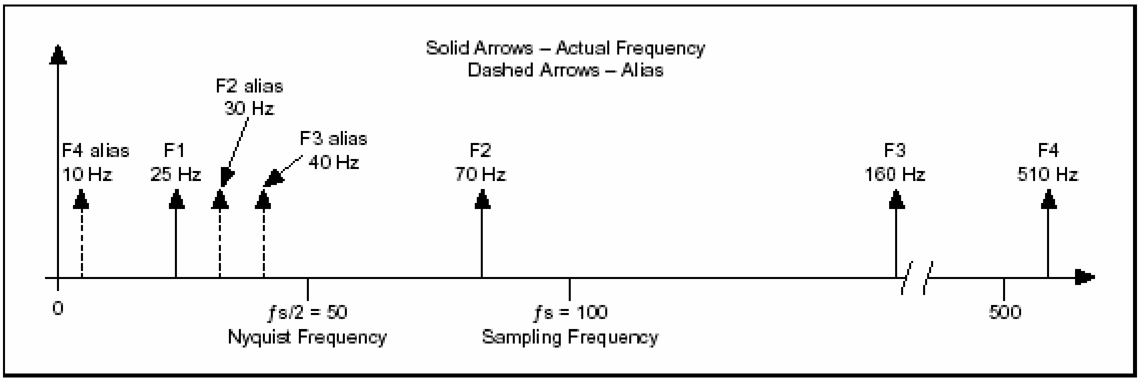
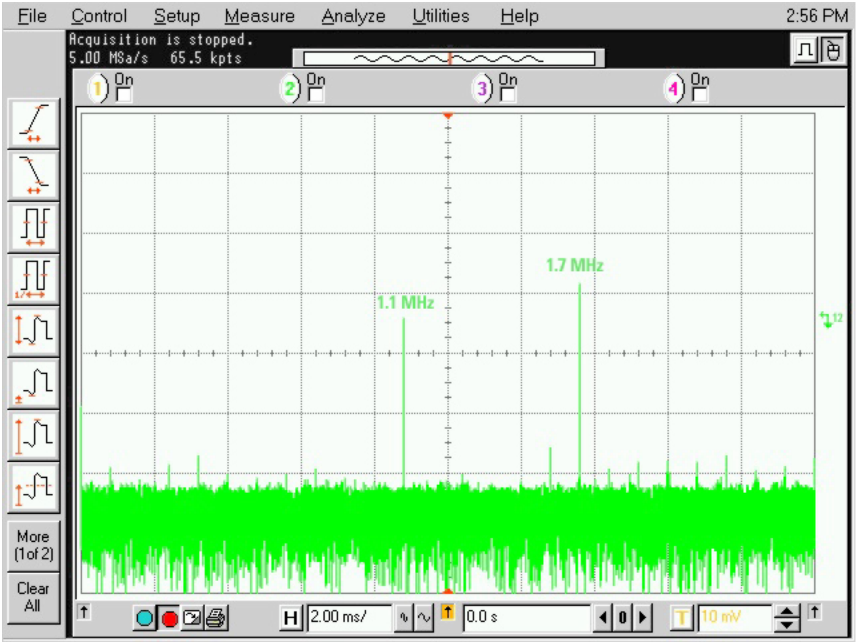


Figure 4. Alias Frequencies Resulting from Sampling a Signal at 100 Hz That Contains Frequency Components Greater than or Equal to 50 Hz

Le frequenze "fantasma" appaiono a 10, 30, e 40 Hz

Nella Figura successiva mostra un altro esempio di due onde sinusoidali con frequenze di 3,3 MHz e 6,1MHz campionato da un analizzatore Infiniium dell'Agilent Technologies con frequenza di campionamento a 5MSa/s. Poiché entrambe le frequenze delle onde sinusoidali sono superiori alla frequenza max di 2,5 MHz (dato dal teorema del campionamento) abbiamo che la frequenza effettiva di 3,3 MHz è rappresentata dalla frequenza "fantasma" di 1,7 MHz mentre la frequenza effettiva di 6,1 MHz è rappresentata dalla frequenza "fantasma" di 1,1 MHz



Proprio per garantire che la condizione del teorema del campionamento possa essere verificata, viene inserito nell'analizzatore numerico un filtro "passabasso" di ingresso: la sua frequenza di taglio, o stop-frequency, viene fissata a metà della frequenza massima di campionamento che permette di tagliare tutte le componenti al di sopra della metà della frequenza di campionamento, questo filtro prende appunto il nome di filtro anti-aliasing.

1.7.3 Aspetti computazionali della FFT

I calcoli di base effettuati per analizzare i segnali includono la conversione dal doppio lato al singolo lato dello spettro, la regolazione della risoluzione in frequenza, tracciamento dello spettro usando la FFT, e la conversione della potenza in unità logaritmiche.

Lo spettro di potenza restituisce un array contenenti i 2 lati dello spettro del segnale.

I valori dell'array sono proporzionali al quadrato dell'ampiezza di ogni componente della frequenza che costituisce il segnale nel dominio del tempo.

Le traccie dei 2 lati dello spettro mostrano le componenti negative e positive ad un'altezza di

$$\frac{A_k^2}{4}$$

dove A_k è l'ampiezza di picco della componente sinusoidale a frequenza k.

1.7.4 Conversione dal doppio al singolo lato dello spettro di potenza

La maggior parte degli strumenti per l'analisi in frequenza visualizzano solo la metà positiva dello spettro perché lo spettro reale di un segnale è simmetrico attorno alla componente continua DC, e quindi le informazioni delle componenti negative sono ridondanti.

In uno spettro a doppio lato, metà energia è contenuto nelle frequenze positive mentre l'altra metà è contenuto nelle frequenze negative. Quindi, per convertire dal doppio al singolo lato dello spettro della potenza bisogna scartare la seconda metà dell'array e moltiplicare ogni suo punto per 2 ad eccezione per la componente continua DC.

$$G_{AA}(i) = S_{AA}(i),\ i = 0\ (DC)$$

$$G_{AA}(i) = 2 \bullet S_{AA}(i),\ i = 1 \text{ to } \frac{N}{2} - 1$$

dove $S_{AA}(i)$ è il doppio lato dello spettro, $G_{AA}(i)$ è il singolo lato dello spettro, e N è la lunghezza del doppio lato dello spettro. Il resto dello spettro $S_{AA}(i)$ da N/2 a N-1 è scartato.

I valori ad eccezione della DC del singolo lato dello spettro sono ad un'altezza di

$$\frac{A_k^2}{2}$$

Questo è equivalente a

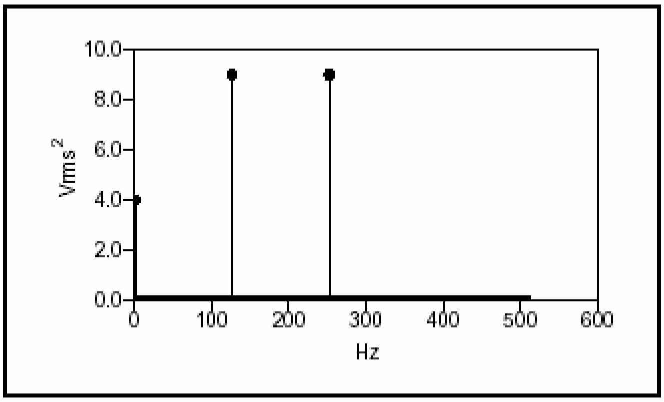
$$\left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

dove

$$\frac{A_k}{\sqrt{2}}$$

è il valore efficace (rms) dell'ampiezza della componente sinusoidale a frequenza k.

Quindi, le unità dello spettro sono spesso riferite come quantità di valori rms del segnale nel dominio del tempo. Ad esempio, il singolo lato dello spettro di potenza del segnale di una forma d'onda in volt è in valore rms.



La Figura mostra il singolo lato dello spettro di un segnale composto da una onda sinusoidale di ampiezza 3 V_{rms} a 128 Hz, da un'onda sinusoidale di ampiezza 3 V_{rms} a 256

Hz, e da una componente continua di 2 Volt. L'onda sinusoidale di 3 V_{rms} ha una tensione di picco pari a $3.0 \cdot \sqrt{2} = 4{,}2426$ V.

1.7.5 Regolazione della risoluzione in frequenza e grafico dello spettro

Il range della frequenza e la risoluzione sull'asse-x dello spettro dipende dalla frequenza di campionamento e dal numero di punti acquisiti. Il numero dei punti di frequenza o linee equivale a

$$\frac{N}{2}$$

dove N è il numero di punti acquisiti del segnale nel dominio del tempo.

Vediamo che nella Figura precedente la prima linea di frequenza è a 0 Hz, cioè la DC. L'ultima linea di frequenza è

$$\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{N}$$

dove F_s è la frequenza alla quale il segnale acquisito nel dominio del tempo è stato campionato. Le linee di frequenza accadono ad intervalli Δf dove

$$\Delta f = \frac{F_s}{N}$$

Le linee di frequenza possono anche essere chiamate come frequenze bins o FFT bins perché si può pensare di una FFT come un set di filtri paralleli di larghezza di banda Δf centrata ad ogni incremento di frequenza dalla componente continua DC fino alla frequenza

$$\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{N}$$

Alternativamente si può calcolare Δf come

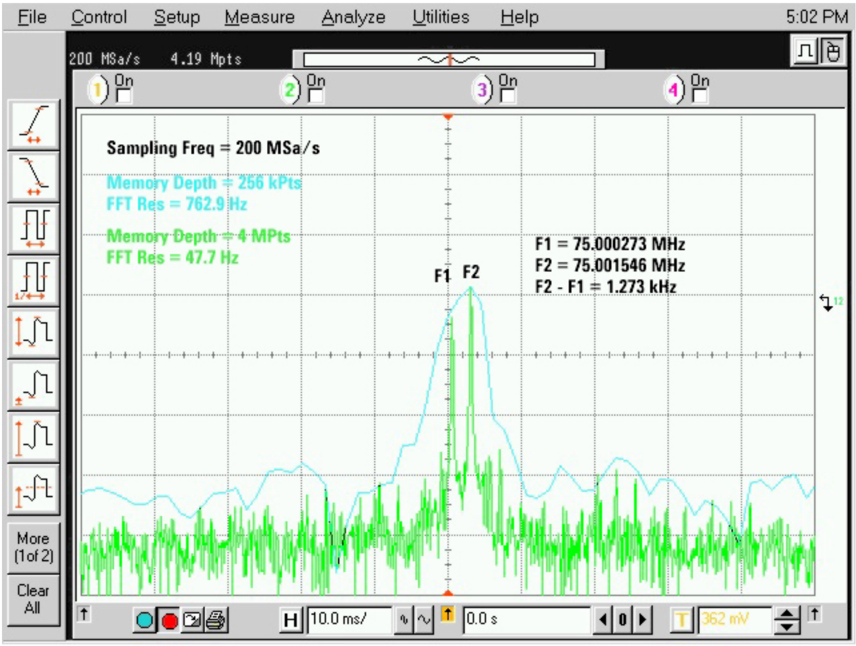
$$\Delta f = \frac{1}{N \bullet \Delta t}$$

dove Δt è il periodo di campionamento. Ovvero, $N \cdot \Delta t$ è la lunghezza del time record che contiene il segnale acquisito nel dominio del tempo. Ad esempio, un segnale rappresentato con 1024 bins campionato a 1024 kHz si ottiene una Δf = 1 kHz e un range di frequenze da DC a 511 kHz.

I calcoli per l'asse delle frequenze dimostrano che la frequenza di campionamento determina il range della frequenza o la larghezza di banda dello spettro e che per una data frequenza di campionamento il numero dei punti acquisiti nel dominio del tempo determina la risoluzione in frequenza. Per incrementare la risoluzione in frequenza per un dato range di frequenza, incrementiamo il numero dei punti acquisiti alla stessa frequenza di campionamento. Ad esempio, se si acquisiscono 2048 punti a 1024 kHz si otterrebbe una risoluzione Δf = 0,5 kHz con range di frequenza 0 a 511,5 kHz. Alternativamente, se la frequenza di campionamento fosse stata di 10,24 kHz con 1024 punti acquisiti, Δf sarebbe stato di 10 Hz con un range di frequenza da 0 a 5,11 kHz.

La figura seguente mostra un altro esempio di uno spettro di un segnale prodotto da due onde sinusoidali che contengono frequenze quasi identiche **F1**=75,000273 MHz ed

F2=75,001546 MHz ottenuto con un analizzatore Infiniium Deep-Memory della Agilent Technologies:



La frequenza Δ=|F1-F2|=1,273 kHz

La frequenza di campionamento è di 200 MSa/s maggiore di 150.003092 MHz (il doppio di F2). Ciò consente di rispettare il principio del campionamento e di prevenire quindi *l'aliasing*.

Con 256K punti (Deep Memory con K=1024 punti), la risoluzione è di 762,9 Hz e non sono sufficienti per rendere distinguibili i due segnali, mentre con 4M punti (Deep Memory con M=1024x1024) la risoluzione dell'FFT è di 47,7 Hz e gli spettri di entrambi i segnali sono chiaramente visibili come si evince dalla Figura. C'è però un trade-off, ovvero aumentando la Deep Memory otteniamo un maggiore tempo di calcolo.

Si sa infatti che la complessità degli algoritmi FFT cresce come $(N/2)*\log_2 N$

1.7.6 Calcoli computazionali usando la FFT

Lo spettro mostra su ogni linea di frequenza la potenza come ampiezza quadratica media ma non include l'informazione di fase. Si può, mediante l'FFT visualizzare sia la frequenza che la fase del segnale.

L'informazione di fase prodotto dall'FFT è la fase relativa all'inizio del segnale nel dominio del tempo. Per questa ragione bisogna fare del *trigger* dal punto iniziale del segnale per ottenere letture di fase fedeli. In molti casi, si vuole determinare la fase relativa tra componenti, o la differenza di fase tra due segnali acquisiti simultaneamente. Si può vedere la differenza di fase tra due segnali usando alcune funzioni FFT avanzate.

La FFT restituisce uno spettro a doppio lato in forma complessa (parte reale ed immaginaria), dalla quale bisogna convertirla in forma polare per ottenere il modulo e la fase. L'asse delle frequenze è identico a quello dello spettro di potenza a doppio lato. L'ampiezza della FFT è relativo al numero dei punti del segnale nel dominio del tempo. Si usa la seguente equazione per calcolare l'ampiezza e la fase dall'FFT.

$$\text{Spettro d'ampiezza in quantità di picco} = \frac{\text{Modulo [FFT(A)]}}{N} = \frac{\sqrt{[\text{real}[FFT(A)]]^2 + [\text{imag}[FFT(A)]]^2}}{N}$$

$$\text{Spettro della fase in radianti} = \text{Phase [FFT(A)]} = \text{arctangent}\left(\frac{\text{imag[FFT(A)]}}{\text{real[FFT(A)]}}\right)$$

dove la funzione arcotangente qui è restituita come valori di fase tra $-\pi$ e $+\pi$, a pieno range di 2π.

Lo spettro d'ampiezza a doppio lato effettivamente mostra metà delle ampiezza di picco alle frequenze positive e negative. Per convertire alla forma del singolo lato, bisogna quindi moltiplicare ogni frequenza per 2 tranne che per la componente continua e scartare la seconda metà dell'array. Le unità delle ampiezza del singolo lato dello spettro sono allora in quantità di picco e danno l'ampiezza di picco di ogni componente sinusoidale che costituisce il segnale nel dominio del tempo. Per la fase del singolo lato dello spettro, bisogna scartare la seconda metà dell'array.

Per vedere lo spettro d'ampiezza in volts (o un'altra quantità) rms, bisogna moltiplicare le componenti, tranne che per la continua, per la radice quadrata di 2 dopo aver convertito lo spettro nella forma del singolo lato. Le equazioni seguenti mostrano il calcolo intero da una FFT a doppio lato ad un singolo lato dello spettro d'ampiezza.

$$\text{Amplitude spectrum in volts rms} = \sqrt{2} \bullet \frac{\text{Magnitude[FFT(A)]}}{N} \quad \text{for } i = 1 \text{ to } \frac{N}{2} - 1$$

$$= \frac{\text{Magnitude[FFT(A)]}}{N} \quad \text{for } i = 0 \text{ (DC)}$$

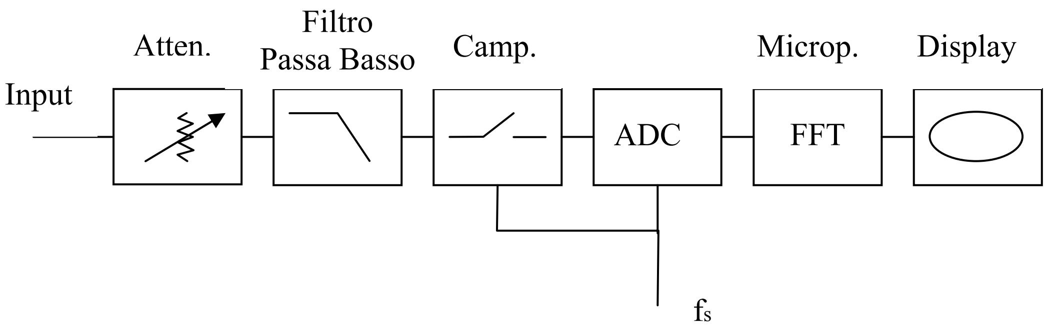
dove *i* è il numero delle linea di frequenza (indice dell'array) dell'FFT di A.

Per vedere lo spettro di fase in gradi, si usa la seguente equazione.

$$\text{Phase spectrum in degrees} = \frac{180}{\pi} \bullet \text{Phase FFT(A)}$$

1.7.7 Architettura di un analizzatore FFT

Un analizzatore di spettro digitale si basa, come si è detto, sulla nota trasformata di Fourier discreta (più brevemente DFT, dall'inglese Discrete Fourier Transform), e la sua architettura fa riferimento al seguente schema a blocchi:



Il segnale da analizzare viene inizialmente filtrato, mediante un filtro analogico passabasso, onde evitare i classici problemi di aliasing; successivamente, esso viene campionato ad intervalli regolari, fino a quando non si riempie un apposito registro in memoria.

Una volta riempito tale registro con i campioni del segnale (nel tempo), un sistema a microprocessore esegue i calcoli necessari per l'applicazione della formula della DFT, cioè per convertire i dati nel dominio della frequenza; i risultati sono dunque i campioni X(k) dello spettro del segnale, che vengono a loro volta memorizzati in un ulteriore registro, pronti ad essere visualizzati sullo schermo, oppure sottoposti a successive elaborazioni, nel qual caso il processo di riempimento della memoria e il calcolo della DFT sono di tipo dinamico, nel senso che vengono coinvolti campioni sempre nuovi del segnale x(t) di partenza.

Volendo distinguere i principali blocchi funzionali specifici di un analizzatore di spettro digitale, si possono citare i seguenti:

- un convertitore AD che, pur avendo generalmente la stessa velocità di quello usato in un oscilloscopio, possiede una risoluzione decisamente più alta (12-14 bit contro gli 8 bit tipici degli oscilloscopi);
- un processore dedicato all'esecuzione della DFT (o, meglio, della FFT) e degli algoritmi basati su di essa (ad esempio per il calcolo del valore efficace delle singole armoniche oppure del "tappeto" di rumore oppure per il calcolo della distorsione armonica);
- una serie di componenti che consentono la visualizzazione sullo schermo dell'ampiezza (eventualmente anche in dB), del contenuto armonico del segnale in funzione della frequenza;

1.7.8 La conversione in unità logaritmica

Spesso, nella maggior parte, l'ampiezza o lo spettro di potenza sono mostrati in unità logaritmiche o decibel (dB). Usando questa unità di misura, è facile far vedere la larghezza del range dinamico, ovvero, è facile vedere componenti di piccolo segnale rispetto a quelli grandi.

Il decibel è un'unità di misura di un rapporto ed è calcolato come segue:

$$dB = 10\log_{10} P/P_r$$

dove P è la potenza misurata e P_r è la potenza di riferimento.
Si usa la seguente equazione per calcolare il rapporto in decibels dai valori d'ampiezza:

$$dB = 20\log_{10} A/A_r$$

dove A è l'ampiezza misurata ed A_r è l'ampiezza di riferimento.
Quando si usa l'ampiezza o la potenza come il quadrato dell'ampiezza dello stesso segnale, il livello in decibel è esattamente lo stesso. Moltiplicando il rapporto in decibel per 2 è equivalente ad avere il quadrato del rapporto. Quindi, si ottiene lo stesso livello in decibel nonostante si usi l'ampiezza o lo spettro di potenza.

Una convenzione comunemente usata è il riferimento di 1 V_{rms} per l'ampiezza. In questo caso, 1 V_{rms} corrisponde a 0 dB. Altre forme comuni di dB è il dB_m, il quale corrisponde al riferimento di 1 mW.

1.7.9 Limitazione d'acquisizione del Front End

Proprio per garantire che la condizione del teorema del campionamento possa essere verificata, viene inserito nello strumento un filtro "passabasso" in ingresso: la sua frequenza di taglio, o *stop-frequency*, viene fissata a metà della frequenza massima di campionamento, che permette di tagliare tutte le componenti al di sopra della metà della frequenza di campionamento; questo filtro prende appunto il nome di filtro anti-aliasing.

La Figura 5 mostra la risposta in frequenza di un filtro antialiasing dell'analizzatore PCI-4450 Family della National Instruments:

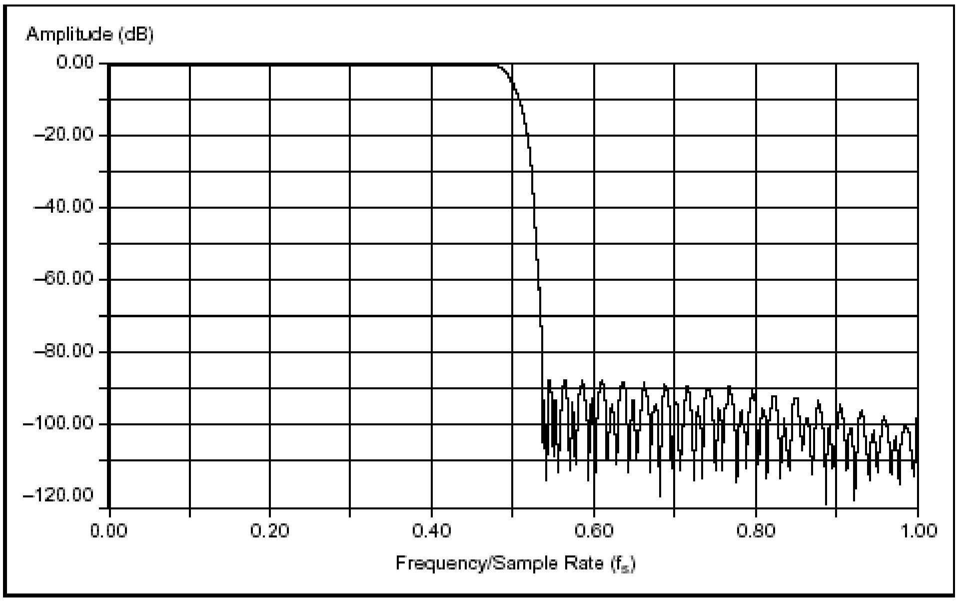


Figure 5. Bandwidth of PCI-4450 Family Input Versus Frequency, Normalized to Sampling Rate

Si nota come un segnale d'ingresso al di sopra della metà della frequenza di campionamento è fortemente attenuato.

Notiamo, che oltre a ridurre le componenti di frequenza che sono al di sopra della metà della frequenza di campionamento, nel filtro si presenta una limitazione di larghezza di banda per la non idealità dello stesso filtro.

I filtri antialiasing attenuano solo una percentuale di frequenze al di sotto della metà della frequenza di campionamento. Per questo motivo per calcolare la larghezza di banda o i numeri di linee per una data frequenza di campionamento, si moltiplica la frequenza di campionamento stessa per 0,464 (nel caso della famiglia PCI-4450 della National Instruments) ottenendo uno spettro di 475 linee di ampiezza ±0,1 dB con una FFT a 1024 punti.

Se invece utilizziamo una FFT a 2048 punti otteniamo il doppio delle linee e quindi una maggiore risoluzione in frequenza, c'è però da dire che questo è in contrasto con i tipici strumenti, i quali hanno 400 o 800 linee massimo per una FFT di 1024 punti o di 2048 punti rispettivamente.

1.7.10 Range dinamico

Il range dinamico può essere definito come l'intervallo massimo nel quale può variare il segnale di ingresso.

Ad esempio, se l'uscita di un determinato trasduttore varia fra un minimo di 1mV e un massimo di 1V il range dinamico del segnale è di 60 dBm.

$$20\log_{10}\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \quad [dBm]$$

Il range dinamico di uno strumento di misura deve essere maggiore del range dinamico del segnale di ingresso e questo per assicurare una elevata accuratezza di analisi di tutto il segnale; nel caso dell'esempio considerato la dinamica dell'analizzatore di spettro deve essere maggiore di 60dBm (1/1000).

Il range dinamico di un analizzatore di spettro è una misura dell'ampiezza del rapporto (Vmax/Vmin) dello spettro creato da un segnale sinusoidale applicato in ingresso. Quindi maggiore è il numero di bit del convertitore A/D maggiore sarà la dinamica dello strumento.

La Figura seguente mostra lo spettro di un segnale sinusoidale puro a 470 MHz prodotto dall'analizzatore di spettro Infiniium FFT dell'Agilent Technologies. Si notano le armoniche a 940 MHz, 1410 MHz, e 1880 MHz che sono al di sotto della metà della frequenza di campionamento a 4 GHz, mentre la linea a 1650 MHz è una frequenza aliasing (fantasma) del segnale d'ingresso a 470 MHz. Si nota anche la frequenza di clock interno a 125 MHz. Il range dinamico tra la frequenza fondamentale a 470 MHz e la maggiore delle armoniche è di 51 dBm.

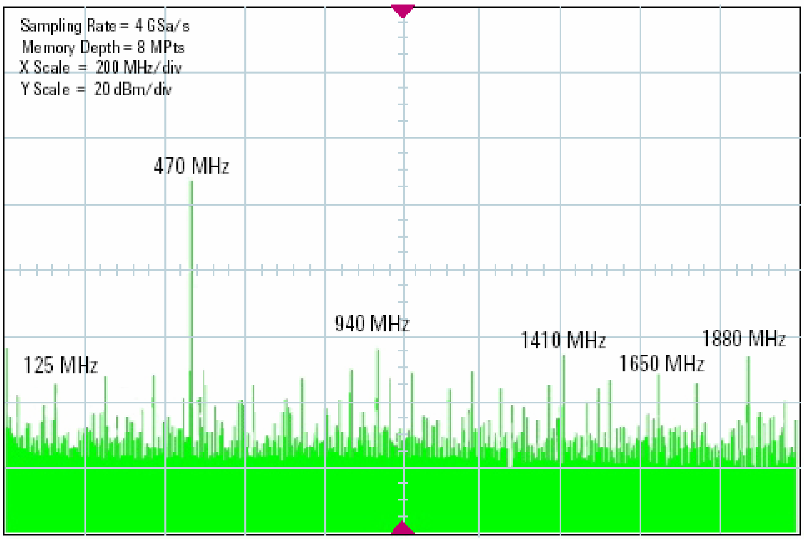


Figure 5. Infiniium FFT spectrum with 470 MHz pure sine wave input

Aumentando la Deep-Memory si migliora il range dinamico, questo perché si riduce il livello di rumore.

Nella figura seguente si mostra l'effetto dell'incremento della lunghezza del record sul range dinamico:

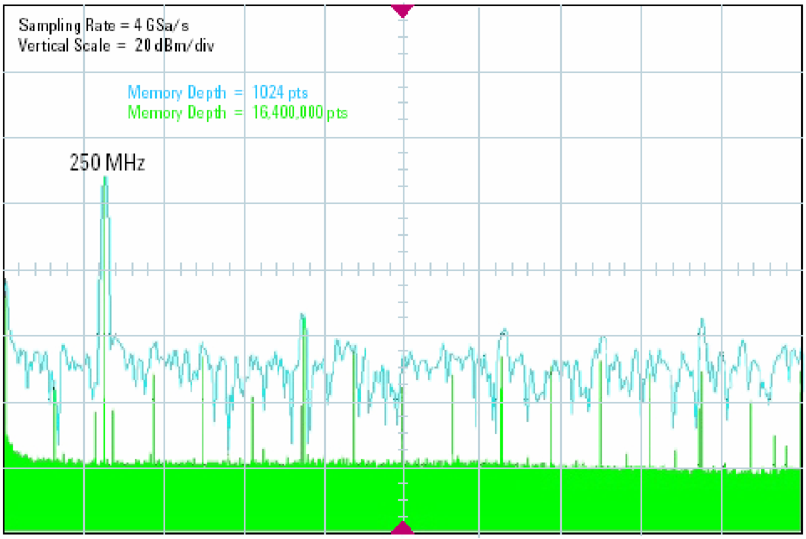


Figure 6. Infiniium FFT spectrum showing how deep memory reduces the noise level

La traccia blu è acquisita con un Deep-Memory di 1024 punti, mentre la traccia verde è acquisita con un Deep-Memory di 16.400.000 punti. Entrambi sono campionati a 4 GSa/s. Si noti che il livello di rumore cala di circa 30 dBm.

Gli analizzatori di spettro più comuni hanno generalmente una risoluzione pari a 12 o 16 bit, mentre nel caso di acquisizione ed elaborazione del segnale tramite schede di acquisizione per personal computer si possono raggiungere risoluzioni fino a 24 bit che corrispondono ad una dinamica teorica massima pari a 144dB.

1.7.11 La dispersione spettrale (Spectral Leakage) e la finestratura

Anche il cambiamento dei limiti di integrazione, dall'infinito al finito, dell'integrale di Fourier

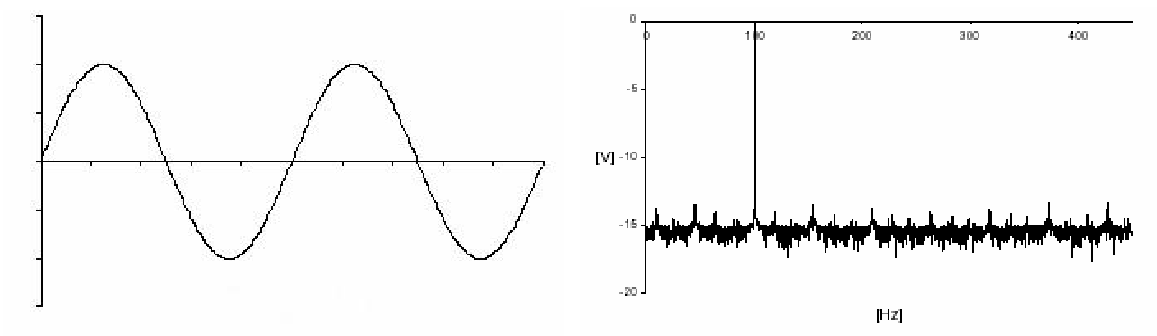
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

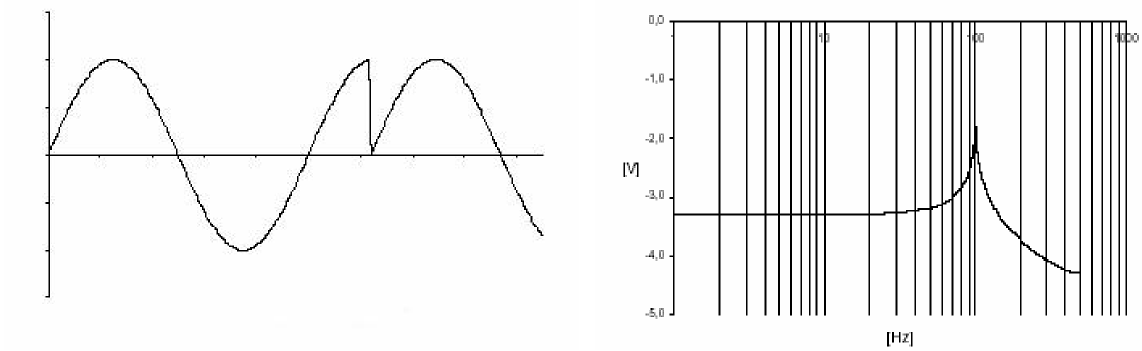
può essere causa di un errore che prende il nome di *leakage*.

Poiché non è possibile misurare un segnale per un tempo infinito, l'analizzatore cambia i limiti dell'integrazione regolandoli sulla durata del tempo che impiega a raccogliere un blocco di campioni. Questo blocco di campioni è detto *time-record*. La FFT richiede che, in questo intervallo, il segnale si ripeta più volte nel tempo.

Se l'insieme delle repliche ha un andamento identico a quello del segnale originario non si avranno problemi di leakage. Se invece ciò non accade, per ridurre l'effetto del leakage, si rende necessario l'uso di una "finestratura".

Se il time-record contiene un numero intero di cicli di una forma d'onda, come un'onda sinusoidale, la forma d'onda è detta *periodica nel time-record*. Come conseguenza di questa caratteristica i valori assunti dalla forma d'onda in corrispondenza degli estremi del time-record sono uguali e se gli intervalli di osservazione sono consecutivi, i punti alle estremità combaciano perfettamente. In tali condizioni l'integrale di Fourier può essere calcolato accuratamente giacché, per quante volte il time-record si ripeta inalterato, il leakage non compare.





Se, invece, la forma d'onda nel time-record non è periodica allora sarà presente l'errore dovuto al leakage. Il caso di time-record consecutivi con valori dei campioni assunti in corrispondenza delle estremità non coincidenti, equivale a sovrapporre un segnale a gradino alla forma d'onda in esame. Poiché un gradino istantaneo contiene un numero infinito di frequenze, queste si sovrapporranno a quelle del segnale sotto analisi invalidando il risultato.

Questo effetto è molto evidenziato nel dominio della frequenza. Infatti, per una sinusoide, invece di avere una linea sottile, lo spettro si slarga in un vasto range di frequenze.

La soluzione usuale al problema dello spectral leakage è quella di forzare la forma d'onda a zero alla fine del time record, pertanto essa sarà sempre la stessa e non ci saranno discontinuità quando il time record viene replicato. Questo può essere effettuato moltiplicando il time record per una funzione finestra. Chiaramente la forma della finestra è importante e influenzerà i dati ma soprattutto deve essere scelta in modo tale da non introdurre essa stessa una discontinuità.

Gli analizzatori a FFT usano il metodo della finestratura per ridurre l'effetto del leakage, e quindi migliorando i risultati nel dominio della frequenza.

Un altro modo per spiegare la dispersione spettrale è di considerare la sequenza finita $x(n)$ come un prodotto di due sequenze di lunghezza infinita: la sequenza originale e la sequenza finestra.

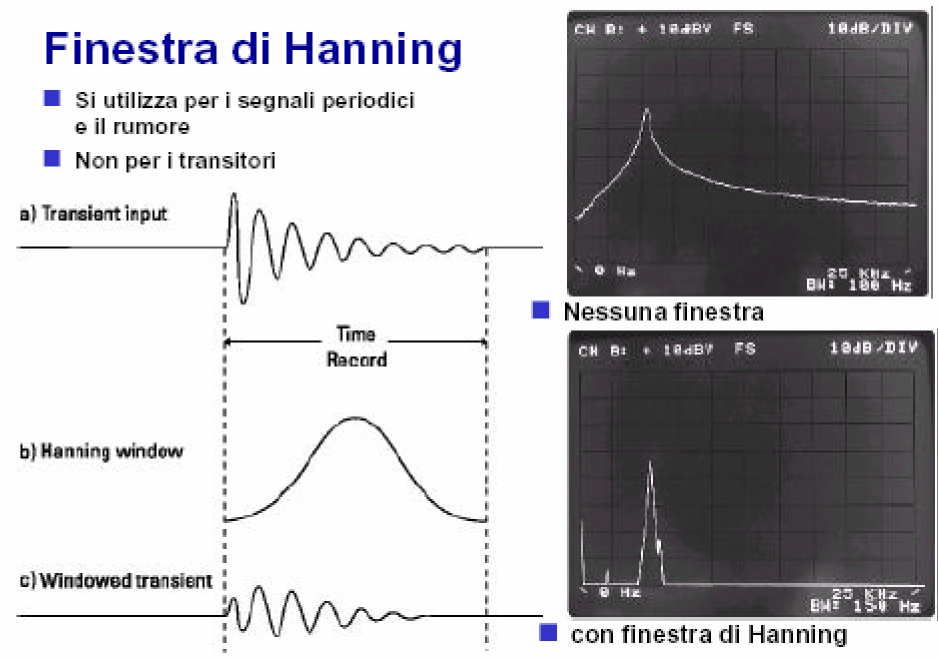
Ricordiamo che ad un prodotto nel dominio del tempo *y(n)=x(n)*w(n)* corrisponde ad una convoluzione nel dominio della frequenza. E' chiaro che al crescere della lunghezza L, lo spettro della finestra è sempre più concentrato sull'origine: pertanto la dispersione spettrale può essere ridotta aumentando la lunghezza della finestra. Tale strada, ovviamente, non è in genere praticabile in quanto la lunghezza della finestra non può eccedere il numero di punti su cui si valuta la DFT.

Le diverse finestre hanno vantaggi differenti ed è importante scegliere quella corretta per ogni misurazione.
Ad esempio, la finestra *uniforme* fornisce la migliore risoluzione in frequenza ed un'elevata accuratezza in ampiezza, ma può essere usata solamente se il misurando è periodico nel time-record. Questa condizione si riscontra, tuttavia, assai di rado con i segnali reali.

Spesso si adottano finestre dotate di spettri caratterizzati da "lobi" laterali poco pronunciati: la prima finestra che è stata introdotta è quella di *Hanning*, il cui andamento è espresso dalle relazioni:

$$w(t)=0 \qquad per\ t<0\ e\ t>T_0$$

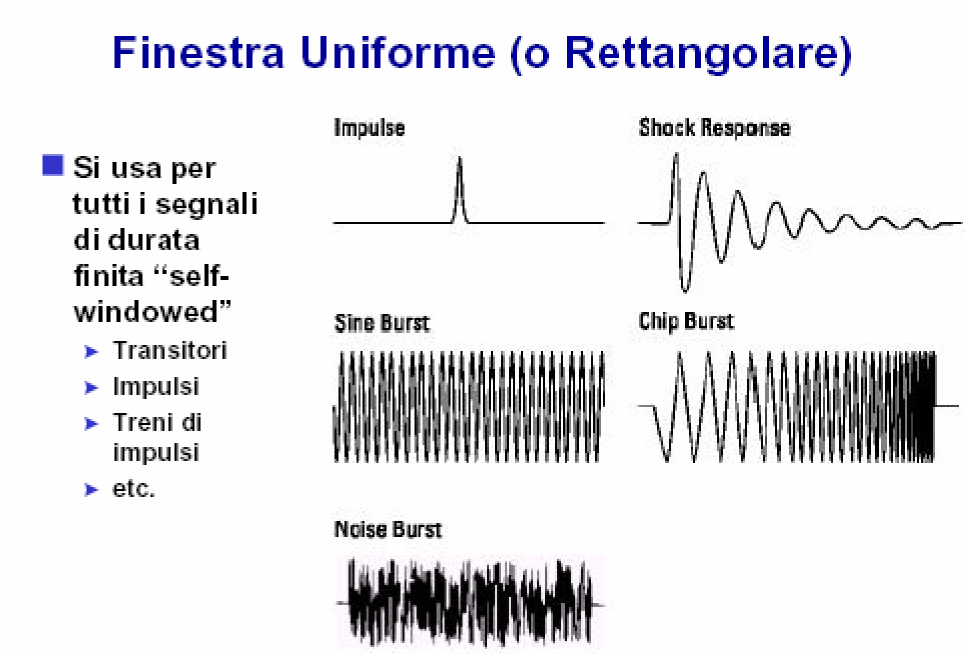
$$w(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) \qquad per\ 0\le t\le T_0$$



Questa finestra determina ancora un errore di leakage qualora la durata del time record non sia multiplo del periodo del segnale ma, grazie alla modesta ampiezza dei lobi laterali del suo spettro, le ampiezze delle armoniche introdotte sono estremamente inferiori a quelle che possono essere determinate dalla finestra rettangolare (o da assenza di finestrature).

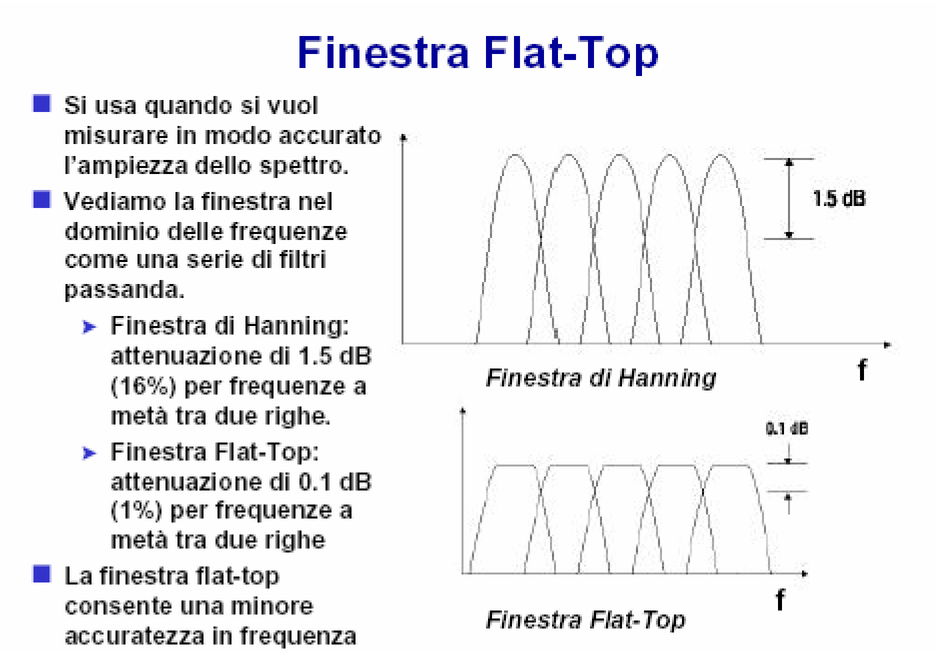
Un'osservazione da fare è che se lo spettro della sequenza da analizzare è sufficientemente piatto, sia in ampiezza che in fase, il legame tra lo spettro della sequenza *x(n)* ed il segnale finestrato *y(n)* risultano proporzionali con costante di proporzionalità pari all'area sottesa dallo spettro della finestra. Questo è senz'altro verificato per i cosiddetti *segnali autofinestrati*, cioè per i segnali aventi durata inferiore o al più uguale alla lunghezza del tempo in analisi, qualora si adoperi la finestra rettangolare. Infatti in tali ipotesi la sequenza troncata coincide con la sequenza da analizzare *x(n)* e la convoluzione restituisce lo spettro *X(F)* del segnale di interesse.

Si noti che sono segnali autofinestrati i segnali transitori, aventi durata in campioni inferiore o al più uguale a quella del segmento d'analisi: ciò spiega il largo impiego della finestra rettangolare per l'analisi spettrale di segnali transitori.



Quando si vuol misurare in modo accurato l'ampiezza dello spettro si adotta la finestra Flat-Top.

Questa finestratura mostra una perdita di risoluzione in frequenza, ma paragonata alla finestratura Hanning fornisce una migliore accuratezza in ampiezza ed è quindi preferibile qualora questa maggiore accuratezza sia richiesta.



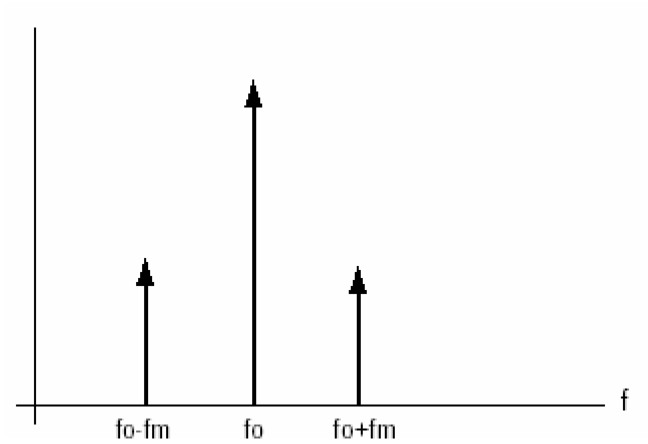
1.8 Applicazioni

1.8.1 Caratterizzazione di un segnale AM

In questo paragrafo descriviamo una applicazione reale di un analizzatore di spettro FFT Deep Memory della serie Infiniium dell'Agilent Technologies.

L'applicazione consiste nella misurazione delle caratteristiche di un segnale modulato in ampiezza (AM). Le caratteristiche d'interesse sono la frequenza portante, f_o, la frequenza modulante, f_m, e l'indice di modulazione, *a*

Lo spettro di un segnale AM contiene tutte le informazioni necessarie per calcolare questi parametri:



In figura si mostra lo spettro di un tipico segnale AM con modulazione sinusoidale.

Si notano la linea centrale dello spettro che rappresenta la portante e le bande laterali. Il segnale modulante è la differenza tra la portante ed una delle bande laterali. L'indice di modulazione è una misura della differenza d'ampiezza tra la portante e la modulante. Essa può essere calcolata dal modulo differenza A_{dB} utilizzando la seguente equazione:

$$a = 2x10^{(A_{dB}/20)}$$

Per questo esempio, un generatore di funzione è usato per generare un segnale AM con i seguenti parametri:

- Frequenza portante = 77 MHz
- Frequenza modulante = 1 kHz
- Indice di modulazione = 2%

Il primo compito da fare è settare sull'analizzatore la frequenza di campionamento e il deep-memory. Per prevenire l'aliasing, la frequenza di campionamento f_s è settato ad un valore maggiore del doppio di 77 MHz + 1 kHz. Per una avere una migliore risoluzione si seleziona il minimo valore disponibile per la frequenza di campionamento che soddisfi il criterio di Nyquist (fissando il numero di punti acquisiti). Per l'Infiniium la minima frequenza di campionamento disponibile per il quale viene soddisfatto questo criterio è di 200 MSa/s.

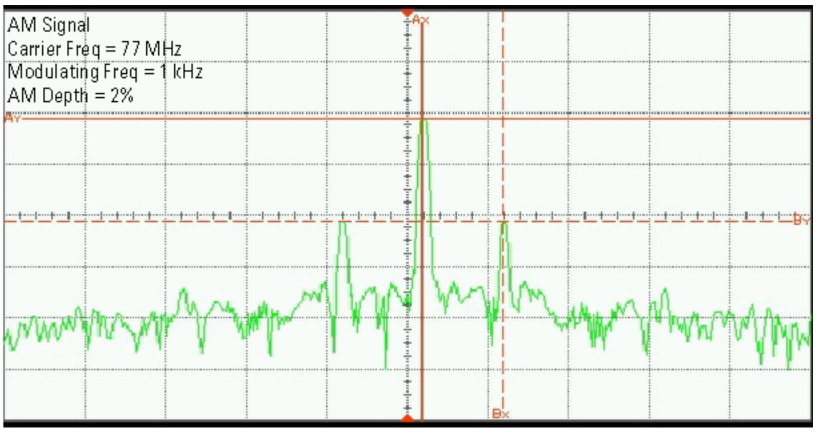
Per ottenere una più accurata misura dell'indice di modulazione, è usata una finestra flat-top. La finestra flat-top è larga 8 bins, così per distinguere chiaramente le bande laterali richiede una risoluzione in frequenza di 1 kHz diviso per 8. Usando questa procedura e riferendoci all'espressione per calcolare la risoluzione in frequenza, l'equazione seguente mostra il minimo numero di punti acquisiti:

$$N \geq \frac{F_s}{F} = \frac{F_s}{\frac{f_m}{W}} = \frac{200\ MSa/s}{\frac{1\ kHz}{8}} = 1.6\ MPts$$

dove F è la risoluzione in frequenza e W è la larghezza del lobo principale della finestra in bins.

Per questo esempio, la FFT Deep-Memory è settato a 8 MPts la quale eccede il minimo consentito, ed offre una risoluzione in frequenza di 23,8 Hz.

La figura seguente mostra lo spettro della FFT del segnale AM visualizzato dallo strumento Infiniium.



Acquisition	Sampling mode real time Normal Configuration 4GSa/s Memory depth manual Memory depth 8200000pts Sampling rate manual Sampling rate 200 MSa/s Averaging off Interpolation on					
Channel 1	Scale 20 mV/div Offset 2 mV BW limit off Coupling DC Impedance 50 Ohms Attenuation 1.000 : 1 Atten units ratio Skew 0.0 s Ext adapter None Ext coupler None Ext gain 1.00 Ext offset 0.0					
Time base	Scale 5.00 ms/ Postion 0.0 s Reference center					
Trigger	Mode edge Sweep auto Hysteresis normal Holdoff time 80 ns Coupling DC Source channel 1 Trigger level 1.6 mV Slope rising					
Function 2	FFT magnitude channel 1 Vertical scale 20.0 dBm/div Offset -51.0000 dBm Horizontal scale 1.00 kHz/div Position 77.0000 MHz Window flattop Resolution 23.8419 Hz					
Measure		current	mean	std dev	min	max
	FFT Δfreq(f2)	1.001 kHz	1.001 kHz	0 Hz	1.001 kHz	1.001 kHz
	FFT Δmag(f2)	-40.17 dB	-40.17 dB	0.0 dB	-40.17 dB	-40.17 dB
Marker		current	mean		X	Y
	FFT Δfreq(f2)	1.001 kHz	1.001 kHz	A—(f2) =	77.000189 MHz	-13.27 dBm
	FFT Δmag(f2)	-40.17 dB	-40.17 dB	B---(f2) =	77.001191 MHz	-53.44 dBm
				Δ =	1.001 kHz	-40.17 dB
				1/ΔX =	999 µs	